Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 3 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR PUNKTSYMMETRIE ZUM URSPRUNG PRÜFEN

Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gewährleistet ist.

Dabei ist

$$f(-x) = 3 \cdot (-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -\left(3 \cdot x \cdot e^{-x^2}\right) = -f(x),$$

d. h. die Bedingung ist erfüllt und G_f somit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BERECHNEN

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f'(x) &= 3 \cdot e^{-x^2} + 3 \cdot x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= 3 \cdot e^{-x^2} - 6x^2 \cdot e^{-x^2} \\ &= 3 \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f''(x) &= 3 \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) + 3 \cdot (-4x) \cdot e^{-x^2} \\ &= -6x \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} - 12x \cdot e^{-x^2} \\ &= 6x \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

Hinreichende Bedingung für ein relatives Maximum bzw. Minimum der Funktion f an der Stelle x: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$.

Dabei ist

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \text{ (da } 3 \cdot e^{-x^2} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. SCHRITT: MITTELS 2. ABLEITUNG ART DER EXTREMPUNKTE BESTIMMEN

$$f''(x) = 6x \cdot (2x^2 - 3) \cdot e^{-x^2}$$
$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2e}} < 0$$

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein relatives Maximum.

Aus Symmetriegründen hat G_f bei $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein relatives Minimum.

4. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE AN DEN EXTREMSTELLEN BERECHNEN

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2e}} \approx 1{,}29$$

Aus Symmetriegründen ist $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2e}} \approx -1{,}29$.

Damit hat G_f die folgenden Extrempunkte:

Hochpunkt: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|\frac{3}{\sqrt{2e}}\right)$

Tiefpunkt: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|-\frac{3}{\sqrt{2e}}\right)$

Aufgabe b (1)

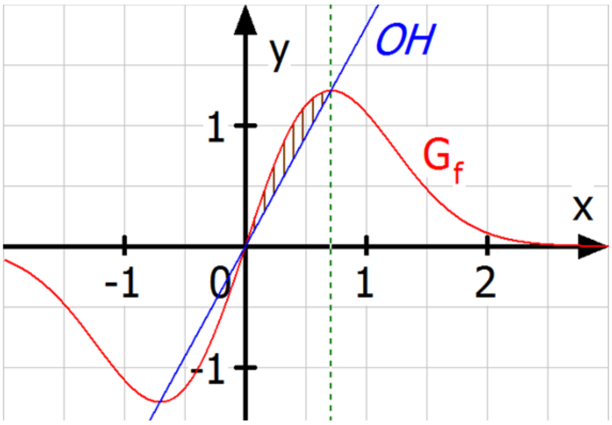
F ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn f die Ableitung von F ist. Dabei gilt:

$$F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} \Rightarrow F'(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} \cdot (-2x) = 3 \cdot x \cdot e^{-x^2} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist F eine Stammfunktion von f.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: SKIZZE



Gesucht ist die braun schraffierte Fläche.

2. SCHRITT: TEILFLÄCHEN BERECHNEN

Die gesuchte Fläche erhält man, indem man die Dreiecksfläche zwischen der blauen Geraden, der grün gestrichelten Linie und der x-Achse von der Fläche unter dem roten Graphen von $x = 0$ bis zur grün gestrichelten Linie abzieht.

Die grün gestrichelte Linie ist bei $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (x-Koordinate des Hochpunkts), also ist die Fläche unter dem roten Graphen

$$A_f = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{3}{2}e^0\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Das Dreieck, das die Gerade OH mit der grün gestrichelten Linie und der x-Achse einschließt, hat als Grundseite die x-Koordinate des Hochpunkts (also $\frac{1}{\sqrt{2}}$) und als Höhe die y-Koordinate des Hochpunkts (also $\frac{3}{\sqrt{2e}}$). Seine Fläche beträgt demnach

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2e}} = \frac{3}{4\sqrt{e}}.$$

3. SCHRITT: FLÄCHENDIFFERENZ BILDEN

Somit ist die gesuchte Fläche

$$A = A_f - A_{\text{Dreieck}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) - \frac{3}{4\sqrt{e}} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}135 \text{ [FE]}.$$

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: STEIGUNGEN BESTIMMEN

Die Tangenten sind lineare Funktionen, die durch folgende Bedingungen festgelegt sind:

1) $t_A(1) = f(1)$ und $t_B(-1) = f(-1)$;

2) $t'_A(1) = f'(1)$ und $t'_B(-1) = f'(-1)$.

Die gesuchten Tangenten haben Gleichungen der Form

$y = m \cdot x + b$,

wobei m die Steigung ist, die mittels Bedingung 2) bestimmt wird, und $b \in \mathbb{R}$ der y-Achsenabschnitt ist.

Es ist $f'(1) = 3 \cdot (1 - 2 \cdot 1^2) \cdot e^{-1^2} = -\frac{3}{e}$, also hat t_A die Steigung $-\frac{3}{e}$.

Aus Symmetriegründen ist $f'(-1) = f'(1) = -\frac{3}{e}$.

2. SCHRITT: *y*-ACHSENABSCHNITTE BESTIMMEN

Es ist $f(1) = 3 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = \frac{3}{e}$ und aus Symmetriegründen $f(-1) = -\frac{3}{e}$. Für Koordinaten der beiden Punkte A und B gilt also $A\left(1\middle|\frac{3}{e}\right)$ und $B\left(-1\middle|-\frac{3}{e}\right)$. Da A auf der Tangente t_A liegt und t_A eine Gleichung der Form

$t_A(x) = m_A \cdot x + b_A$ mit $m_A = -\frac{3}{e}$ hat,

folgt

$$\frac{3}{e} = m_A \cdot 1 + b_A = \frac{3}{e} = -\frac{3}{e} \cdot 1 + b_A \Rightarrow b_A = \frac{3}{e} + \frac{3}{e} = \frac{6}{e}.$$

Die Tangente t_A hat also die Gleichung

$$t_A(x) = -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{6}{e}.$$

Analog hat t_B eine Gleichung der Form

$t_B(x) = m_B \cdot x + b_B$ mit $m_B = -\frac{3}{e}$, der die Koordinaten von B genügen müssen, d. h.

$$-\frac{3}{e} = -\frac{3}{e} \cdot (-1) + b_B \Rightarrow b_B = -\frac{3}{e} - \frac{3}{e} = -\frac{6}{e}.$$

Die Tangente t_B hat also die Gleichung

$$t_B(x) = -\frac{3}{e} \cdot x - \frac{6}{e}.$$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DER *x*-ACHSE

$t_A(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Schnittpunkt $A_x(2|0)$

$t_B(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{e}x - \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ Schnittpunkt $B_x(-2|0)$

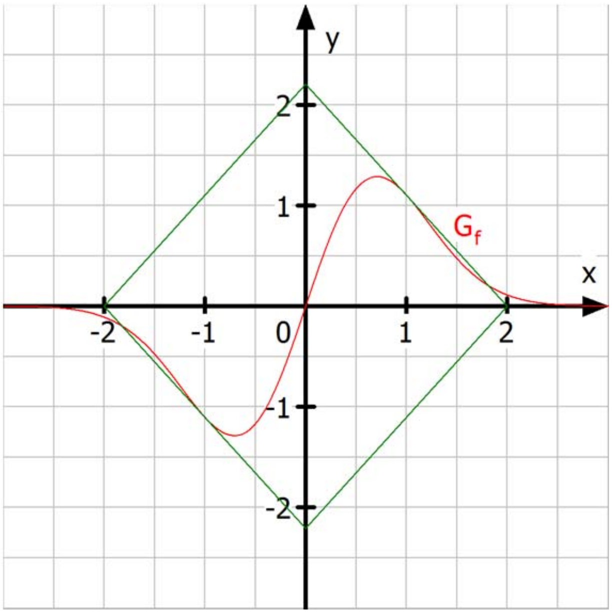
2. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DER *y*-ACHSE

Die y-Achsenabschnitte wurden oben berechnet:

für t_A: $A_y\left(0\middle|\frac{6}{e}\right)$,

für t_B: $B_y\left(0\middle|-\frac{6}{e}\right)$.

Aufgabe c (3)



Aufgabe c (4)

1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN EINER RAUTE NENNEN

Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind.

2. SCHRITT: RAUTENEIGENSCHAFTEN NACHWEISEN

In dem Viereck $A_xA_yB_xB_y$ sind die Seiten $\overline{A_xA_y}$ und $\overline{B_xB_y}$ parallel. (Das sind Abschnitte der beiden Tangenten mit der gleichen Steigung.) Außerdem sind wegen der Symmetrie beide Seiten gleich lang. Daraus folgt, dass die Seiten $\overline{A_yB_x}$ und $\overline{B_yA_x}$ auch parallel und gleich lang sein müssen. Ergo handelt es sich um eine Raute.

Aufgabe c (5)

1. SCHRITT: FLÄCHENINHALT EINER RAUTE

Der Flächeninhalt der grünen Raute ist viermal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks, das die Raute aus dem I. Quadranten heraus schneidet.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS

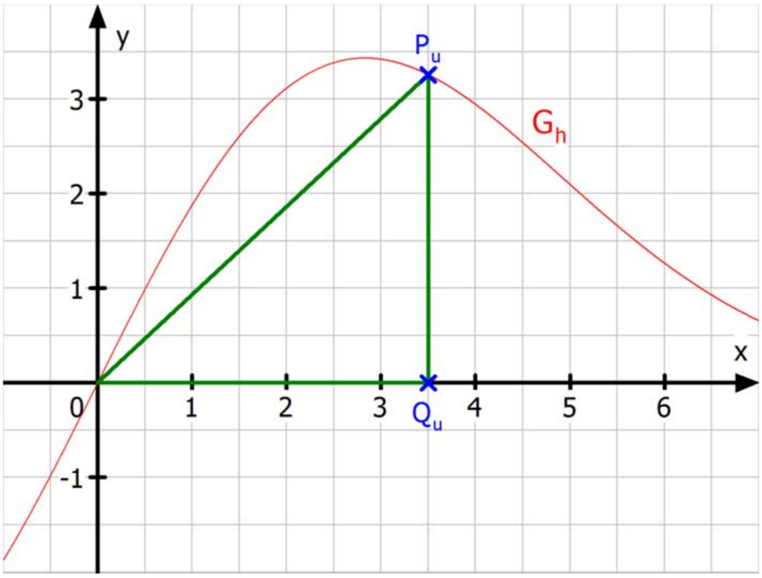
Das genannte Dreieck hat die waagrechte Grundseite der Länge 2 und die zugehörige Höhe $\frac{6}{e}$ (y-Achsenabschnitt der Tangente t_A), also ist die Fläche

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{e} = \frac{6}{e} \text{ [FE]}.$$

Die Raute hat somit den Flächeninhalt

$$A_{\text{Raute}} = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{6}{e} = \frac{24}{e} \approx 8{,}83 \text{ [FE]}.$$

Aufgabe d (1)



Aufgabe d(2)

Der Flächeninhalt des grün umrandeten Dreiecks ist

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ_u} \cdot \overline{Q_u P_u},$$

wobei die Länge der Grundseite $\overline{OQ_u}$ der x-Koordinate des Punktes Q_u (also u) entspricht und die Höhe $\overline{Q_u P_u}$ der y-Koordinate von P_u (also $h(u)$) entspricht.

Somit ist $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot h(u)$.

Aufgabe d (3)

1. SCHRITT: NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMSTELLEN

Wenn u_E eine Extremstelle der differenzierbaren Funktion A ist, dann gilt

$A'(u_E) = 0$.

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG DER FUNKTION *A* BESTIMMEN

Nach der Produktregel ist

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot h(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u).$$

3. SCHRITT: 1. ABLEITUNG NACH $h'(u_E)$ AUFLÖSEN

Aus der letzten Gleichung folgt

$$A'(u_E) = \frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E),$$

also wegen Schritt 1

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & h(u_E) + u_E \cdot h'(u_E) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u \cdot h'(u_E) = -h(u_E) \\
\Leftrightarrow\ & h'(u_E) = -\frac{h(u_E)}{u_E}.
\end{aligned}$$

4. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR LOKALES MAXIMUM

A hat genau dann ein lokales Maximum bei u_E, wenn $A''(u_e) < 0$ gilt.

5. SCHRITT: 2. ABLEITUNG BILDEN

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot h(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u)$$

$$\Rightarrow A''(u) = \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h''(u) = h'(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h''(u).$$

Wenn also $h'(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h''(u_E) < 0$ gilt, so ist $A''(u_E) < 0$, also u_E ein lokales Maximum.

Aufgabe d (4)

1. SCHRITT: ERSTE BEDINGUNG IN TEILAUFGABE d) (3) ANWENDEN

Wird die Fläche A bei $a > 0$ maximal, so folgt aus Teilaufgabe d) (3)

$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$.

Einsetzen der oben berechneten Funktionsterme für f und f' liefert

$$3 \cdot (1 - 2a^2) \cdot e^{-a^2} = -\frac{3 \cdot a \cdot e^{-a^2}}{a} = -3e^{-a^2}$$

$\Leftrightarrow 1 - 2a^2 = -1$
$\Leftrightarrow |a| = 1.$

Die Fläche kann also nur für $a = 1$ maximal werden (da $a > 0$ vorausgesetzt ist).

2. SCHRITT: ZWEITE BEDINGUNG IN TEILAUFGABE d) (3) ANWENDEN

In Teilaufgabe d) (3) wurde eine hinreichende Bedingung für ein Maximum der Funktion A an der Stelle $a > 0$ gefunden, nämlich

$$f'(a) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot f''(a) < 0.$$

Einsetzen der oben berechneten Funktionsterme für f' und f'' liefert die Bedingung

$$3 \cdot (1 - 2a^2) \cdot e^{-a^2} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 6a \cdot (2a^2 - 3) \cdot e^{-a^2} < 0$$

Der Kandidat $a = 1$ aus Schritt 1 erfüllt diese Bedingung, denn

$$3 \cdot (1 - 2 \cdot 1^2) \cdot e^{-1^2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1^2 - 3) \cdot e^{-1^2} = -\frac{6}{e} < 0.$$

Also hat der Flächeninhalt A an der Stelle $a = 1$ ein lokales Maximum. Da der Definitionsbereich ein offenes Intervall ist, gibt es keine Randmaxima. Da $a = 1$ die einzige Nullstelle von A' ist, folgt also, dass hier ein globales Maximum vorliegt.