Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 2 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a (1)

Anhand der Graphen ist erkennbar, dass sowohl in der Stadt als auch auf Land die Ozonbelastung im Verlauf des Morgens ansteigt, am Nachmittag am höchsten ist, und danach kontinuierlich wieder abnimmt.

Die Ozonbelastung im ländlichen Raum ist dabei stets höher ist als in der Stadt. Anstieg und Rückgang der Ozonwerte gehen in der Stadt schneller vonstatten als auf dem Land und der höchste Wert wird etwa 2 Stunden später erreicht (auf dem Land gegen 16 Uhr und in der Stadt erst gegen 18 Uhr).

Aufgabe a (2)

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$
$\Longrightarrow f(0) = 55$ und $f(14) = 76{,}168$.

Um 7 Uhr wird in der Stadt eine Ozonkonzentration von 55 $\frac{\mu g}{m^3}$ und um 21 Uhr eine Konzentration von 76,168 $\frac{\mu g}{m^3}$ prognostiziert.

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

Gesucht ist das Maximum von f auf $[0; 14]$. Eine hinreichende für ein Maximum an der Stelle x lautet: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$. Dabei ist

$$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$$

$$\Longrightarrow f'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t)$$

$$\Longrightarrow f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG $= 0$ SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t) = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t = 0$ $\quad | t$ ausklammern

$\Leftrightarrow t(t^2 - 31{,}8t + 202{,}4) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ oder $t^2 - 31{,}8t + 202{,}4 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung mit der pq-Formel:

$t^2 - 31{,}8t + 202{,}4 = 0$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= 15{,}9 \pm \sqrt{(15{,}9)^2 - 202{,}4}$$
$$= 15{,}9 \pm 7{,}1$$
$$\Leftrightarrow t = 8{,}8 \text{ oder } t = 23.$$

Da $t = 23$ außerhalb des Modellierungsbereichs liegt, kommen nur $t = 0$ und $t = 8{,}8$ als Maximalstellen in Frage.

3. SCHRITT: MAXIMALITÄT AN DEN NULLSTELLEN VON f' PRÜFEN

$f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$

$f''(8{,}8) = -7{,}4976 < 0 \Longrightarrow$ lokales Maximum bei $t = 8{,}8$.

4. SCHRITT: BERECHNUNG DER FUNKTIONSWERTE

Randwerte oben schon berechnet: $f(0) = 55$ und $f(14) = 76{,}168$. Zum Vergleich: $f(8{,}8) = 181{,}753792$. Dies ist also der größte Wert.

Die höchste Ozonkonzentration beträgt etwa 181,75 $\frac{\mu g}{m^3}$ und wird um 15^{48} Uhr erreicht.

Aufgabe b (1)

Gesucht sind Maximum und Minimum von f' im dargestellten Bereich.

Hinreichende Bedingung für lokales Extremum von f' an der Stelle x: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

1. SCHRITT: 2. ABLEITUNG VON f BESTIMMEN

$f''(t) = 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4)$ (s.o.)

2. SCHRITT: 2. ABLEITUNG $= 0$ SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 63{,}6t^2 + 202{,}4 = 0$

Die quadratische Lösungsformel liefert

$$t_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{63{,}6 \pm \sqrt{(-63{,}6)^2 - 2428{,}8}}{6} = \frac{63{,}6 \pm \sqrt{1616{,}16}}{6}$$

$t_1 \approx 3{,}9$

$t_2 \approx 17{,}3$

3. SCHRITT: STEIGUNG AN DEN RÄNDERN DER FUNKTION BERÜCKSICHTIGEN

$t_2 > 14$ liegt nicht im Modellierungsbereich. Als Maximal- oder Minimalstellen von f' kommen demnach nur t_1 und die Randstellen $t = 0$ und $t = 14$ in Frage. Die zugehörigen Werte von f' sind

$f'(0) = 0$ (s.o.), $f'(t_1) \approx f'(3{,}9) \approx 21{,}9$ und $f'(14) \approx -39{,}3$.

Somit nimmt die Ozonkonzentration bei $t = t_1 \approx 3{,}9$ (also gegen 10^{54} Uhr) am stärksten zu und bei $t = 14$ (also um 21^{00} Uhr) am stärksten ab.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: DIE BEDEUTUNG DES AUSDRUCKS $\int_a^{a+8} f(t)dt$

Der Ausdruck $\frac{1}{8}\int_a^{a+8} f(t)dt$ kann als durchschnittliche Ozonkonzentration über einen Zeitraum von 8 Stunden irgendwo zwischen 7 und 21 Uhr am Prognosetag interpretiert werden.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: STAMMFUNKTION VON f BESTIMMEN

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$

$$\Rightarrow F(t) = 0{,}06 \cdot \left(\frac{0{,}25}{5}t^5 - \frac{10{,}6}{4}t^4 + \frac{101{,}2}{3}t^3\right) + 55t$$
$$= 0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t$$

ist eine Stammfunktion von f.

2. SCHRITT: INTEGRAL BERECHNEN

$$\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)dt = \frac{1}{8}[0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t]_0^8$$
$$= \frac{1}{8}[(0{,}003 \cdot 8^5 - 0{,}159 \cdot 8^4 + 2{,}024 \cdot 8^3 + 55 \cdot 8) - 0]$$
$$= 115{,}416$$

Aufgabe b (4)

Du musst die Wertemenge der Funktion beachten. Der Die Abbildung lässt vermuten, dass der Graph von f irgendwo im Bereich $]14; 24]$ die x-Achse unterschreitet. Tatsächlich ist

$f(24) = -262{,}952 < 0.$

Eine negative Ozonkonzentration macht für die Modellierung keinen Sinn. Daher ist die Funktion f nicht auf dem ganzen Intervall $[0; 24]$ für die Modellierung geeignet.

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: GEGEBENE WERTE NOTIEREN

$O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40$

Gegeben: $T_m = 28$ $\quad O_m = 180$

Gesucht: O_h

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} & O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}25 \cdot O_h = O_m - 5{,}5 \cdot T_m + 40 \\ \Leftrightarrow\ & O_h = 4 \cdot O_m - 22 \cdot T_m + 160 = 4 \cdot 180 - 22 \cdot 28 + 160 = 264. \end{aligned}$$

Beträgt die maximale Ozonkonzentration heute 264 $\frac{\mu g}{m^3}$, so erreicht die Ozonkonzentration morgen nach dem Schweizer Modell den Maximalwert 180 $\frac{\mu g}{m^3}$.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: GEGEBENE WERTE NOTIEREN

$O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40$

Gegeben: $O_m = 240; \quad O_h = 60$

Gesucht: T_m

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} 0{,}25 \cdot 60 + 5{,}5 \cdot T_m - 40 &= 240 && |+25 \\ 5{,}5 \cdot T_m &= 265 && |:5{,}5 \\ T_m &= 48{,}\overline{18} \end{aligned}$$

Es müsste eine Temperatur von etwas mehr als 48,1 °C vorhergesagt werden.