

Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 1

Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012 GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: $f'(0)$ UND $f'(140)$ BERECHNEN

$$f'(x) = \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}x} - \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{60} e^0 - \frac{1}{600} = 0,015 \text{ und}$$

$$f'(140) = \frac{1}{60} e^{-7} - \frac{1}{600} \approx -0,00165.$$

2. SCHRITT: MONOTONIEVERHALTEN ERMITTELN

$$f'(x) = \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20}x} - \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow f''(t) = -\frac{1}{1200} e^{-\frac{1}{20}t} < 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f' ist daher auf ihrem ganzen Definitionsbereich streng monoton fallend.

3. SCHRITT: NULLSTELLEN BESTIMMEN

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{60} e^{-\frac{1}{20} \cdot 20 \cdot \ln 10} - \frac{1}{600} &= \frac{1}{60} e^{-\ln 10} - \frac{1}{600} \\ &= \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{e^{\ln 10}} - \frac{1}{600} \\ &= \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{600} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$t_0 = 20 \cdot \ln 10 \approx 46,05$ ist also eine Nullstelle von f' . Aufgrund der strengen Monotonie kann f' höchstens eine Nullstelle haben, also ist das die einzige.

Prüfungsteil 1:

Analysis

Aufgabe a (2)

Im Intervall $[0; 20 \ln 10[$ ist f' positiv und fallend. Die Alkoholkonzentration nimmt also während der ersten ca. 46 Minuten zu, allerdings immer langsamer. Für $t > 20 \ln 10$ ist f' negativ und nach wie vor fallend. Hier nimmt also die Alkoholkonzentration im Blut wieder ab, und zwar immer schneller. Die Änderungsrate nähert sich dabei einem konstanten Wert von etwas mehr als $-0,002$ Promille pro Minute.

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Die Funktion f , die die Blutalkoholkonzentration beschreibt, ist durch zwei Bedingungen festgelegt:

1. Sie muss eine Stammfunktion von f' sein, damit f' die zugehörige zeitliche Änderungsrate beschreibt.
2. Sie muss $f(0) = 0$ erfüllen, da die Versuchsperson zu Beginn der Beobachtungszeit noch keinen Alkohol im Blut hat.

2. SCHRITT: DIE ABLEITUNG DER FUNKTION f BESTIMMEN

Die Ableitung der Funktion

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}$$

lautet nach der Kettenregel

$$-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) - \frac{1}{600} = \frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600},$$

was mit dem zuvor angegebenen Funktionsterm von f' übereinstimmt. Also ist f eine Stammfunktion von f' .

3. SCHRITT: FUNKTIONSWERT ZUM ZEITPUNKT $t = 0$ BERECHNEN

$$f(0) = -\frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3} = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass f die Blutalkoholkonzentration während der ersten 140 Minuten nach der Einnahme beschreibt.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: BEDINGUNGEN FÜR HOCHPUNKTE

Aus Aufgabe a) (2) geht hervor, dass f auf dem Intervall $[0; t_0[$ streng monoton wächst und auf dem Intervall $]t_0; 140]$ streng monoton fällt. Daher erreicht f an der Stelle t_0 ihr absolutes Maximum

$$f(20\ln 10) = -\frac{1}{3}e^{-\ln 10} - \frac{1}{600} \cdot 20\ln 10 + \frac{1}{3} = 0,3 - \frac{20\ln 10}{600} \approx 0,223.$$

Die höchste Alkoholkonzentration wird ca. 46 Minuten nach Beginn der Beobachtungszeit gemessen und beträgt etwa 0,22 ‰.

Aufgabe b (3)

$$f(140) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{140}{20}} - \frac{140}{600} + \frac{1}{3} = 0,1 - \frac{1}{3}e^{-7} \approx 0,0997.$$

Am Ende der Beobachtungszeit beträgt die Blutalkoholkonzentration noch knapp 0,1 ‰.

Aufgabe c (1)

Aufgrund der Monotonie von f und der Randwerte $f(0) = 0$ und $f(140) \approx 0,1$ ist klar, dass der Wert von h nur im Bereich $t > 140$ unterhalb von 0,01 sinken kann. Zu lösen ist also die Ungleichung

$$\begin{aligned} g(t) &< 0,01 \\ \Leftrightarrow u \cdot e^{-v \cdot t} &< 0,01 \\ \Leftrightarrow e^{-v \cdot t} &< \frac{0,01}{u} \quad (\text{da } u > 0) \\ \Leftrightarrow -v \cdot t &< \ln\left(\frac{0,01}{u}\right) = -\ln\left(\frac{u}{0,01}\right) = -\ln(100u) \\ \Leftrightarrow t &> \frac{1}{v} \cdot \ln(100u) \approx 278,74 \text{ für } u \approx 1,01357 \text{ und } v \approx 0,01657. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde berücksichtigt, dass $-v < 0$ ist, d. h. das Ungleichheitszeichen dreht sich um.

Nach rund 279 Minuten ist der Alkoholwert erstmals unter 0,01 ‰ gesunken.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: ANFORDERUNGEN AN DIE FUNKTION

Um für die Modellierung des Blutalkoholabbaus geeignet zu sein, darf die Funktion nur positive Werte annehmen und sollte außerdem für große

Prüfungsteil 1:

Analysis

Zeiten gegen null streben, da der Blutalkoholspiegel irgendwann unter der Nachweisbarkeitsgrenze sinken muss.

2. SCHRITT: BEDINGUNGEN FÜR f UND g PRÜFEN

Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{20}t}}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3} \right) = -\infty,$$

also werden die Funktionswerte von f für große t negativ. Somit eignet sich f nicht für alle $t > 140$ für die Modellierung.

Die Funktion h hingegen erfüllt für $t > 140$

$$h(t) = g(t) = u \cdot e^{-v \cdot t} > 0 \text{ (wegen } u > 0 \text{)}$$

und außerdem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = u \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-v \cdot t} = 0 \text{ (wegen } v > 0 \text{)}.$$

Somit genügt die Funktion h den oben genannten Anforderungen.

Aufgabe c (3)**1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN DER FUNKTION k' ABLESEN**

Der Graph von k' verläuft zunächst oberhalb der x -Achse und fällt streng monoton. Nach dem Nulldurchgang bei $t_1 \approx 46$ bleibt der Graph unterhalb der x -Achse, wobei der Wert von k' ab ca. $t = 140$ konstant bei null bleibt.

Der Graph von k' schließt im I. Quadranten mit den Koordinatenachsen eine deutlich größere Fläche ein, als im IV. Quadranten.

2. SCHRITT: EIGNUNG FÜR DIE MODELLIERUNG PRÜFEN

Die Blutalkoholkonzentration würde bei einer Modellierung der Änderungsrate mit k' im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_1$ mehr zunehmen, als sie für $t_1 \leq t \leq 140$ abnehmen würde, d. h. die Blutalkoholkonzentration wäre nach 140 Minuten größer als zu Beginn der Beobachtungszeit. Ab dann wäre aber die Änderungsrate konstant null, d. h. die Konzentration bliebe bei diesem positiven Wert, anstatt allmählich gegen null abzuklingen.

Somit eignet sich die Funktion k' nicht zur Modellierung der Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration.