Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 2 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2014 LK

Aufgabe 2

a)

(1) 1. SCHRITT: GESAMTZUFLUSSRATE BERECHNEN

Die Gesamtzuflussrate ist gegeben durch die Funktion h_a, wobei

$h_a(0) = 740$ und

$h_a(6a) = 108a^3 - 252a^3 + 144a^3 + 740 = 740$ ist.

Somit beträgt die Gesamtzuflussrate zu Beginn und am Ende der Beobachtungszeit jeweils 740 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.

(2) 1. SCHRITT: ZUFLUSSRATE AUS BACH 2 BERECHNEN

Die Zuflussrate aus Bach 2 ist das, was von der Gesamtzuflussrate übrig bleibt, wenn man den Beitrag von Bach 1 (also f_a) abzieht:

$$\begin{aligned} g_a(t) &= h_a(t) - f_a(t) \\ &= \frac{1}{2}t^3 - 7at^2 + 24a^2t + 740 - \left(\frac{1}{4}t^3 - 3at^2 + 9a^2t + 340\right) \\ &= \frac{1}{4}t^3 - 4at^2 + 15a^2t + 400. \end{aligned}$$

(3) 1. SCHRITT: DIFFERENZFUNKTION AUFSTELLEN

Der Unterschied der Zuflussraten aus Bach 1 und Bach 2 zum Zeitpunkt t ist

$$\begin{aligned} g_a(t) - f_a(t) &= \frac{1}{4}t^3 - 4at^2 + 15a^2t + 400 - \left(\frac{1}{4}t^3 - 3at^2 + 9a^2t + 340\right) \\ &= -at^2 + 6a^2t + 60. \end{aligned}$$

(3) 2. SCHRITT: NULLSTELLEN BERECHNEN

Die Nullstellen liegen laut quadratischer Lösungsformel bei

$$t = \frac{-6a^2 \pm \sqrt{36a^4 + 240a}}{-2a} = 3a \mp \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}}.$$

(3) 3. SCHRITT: INTERVALL BESTIMMEN, WO DIFFERENZ POSITIV IST

Wegen $a > 0$ ist der Graph der Differenzfunktion eine nach unten geöffnete Parabel, d. h. die Funktion ist nur zwischen den Nullstellen positiv, also im Intervall $\left]3a - \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}}; 3a + \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}}\right[$. Wegen $\frac{60}{a} > 0$ ist $9a^2 + \frac{60}{a} > 9a^2$, also $\sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} > \sqrt{9a^2} = 3a$. Daher ist die linke Intervallgrenze kleiner als 0 und die rechte Intervallgrenze größer als $6a$. Während des gesamten Beobachtungszeitraums $[0; 6a]$ ist also $g_a(t) - f_a(t) > 0$ und somit $g_a(t) > f_a(t)$. Die Zuflussrate aus Bach 2 ist daher in diesem Zeitfenster stets größer als die Zuflussrate aus Bach 1.

(4) 1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

Eine hinreichende Bedingung für ein Maximum von h_a an der Stelle t ist $h_a'(t) = 0$ und $h_a''(t) < 0$.

$$h_a(t) = \frac{1}{2}t^3 - 7at^2 + 24a^2t + 740$$

$$\Rightarrow h_a'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 14at + 24a^2$$

$$\Rightarrow h_a''(t) = 3t - 14a$$

(4) 2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$\frac{3}{2}t^2 - 14at + 24a^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{14a \pm \sqrt{196a^2 - 144a^2}}{3} = \frac{(14 \pm \sqrt{52})a}{3}$$

(4) 3. SCHRITT: HINREICHENDE BEDINGUNG ÜBERPRÜFEN

Es gilt

$$h_a''\left(\frac{(14 - \sqrt{52})a}{3}\right) = -\sqrt{52}a < 0 \text{ und}$$

$$h_a''\left(\frac{(14 + \sqrt{52})a}{3}\right) = \sqrt{52}a > 0.$$

Die Gesamtzuflussrate nimmt somit ihr Maximum zum Zeitpunkt $t_m = \frac{(14-\sqrt{52})a}{3} \approx 2{,}26a$ an.

b)

(1) 1. SCHRITT: 2. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

Eine hinreichende Bedingung für eine Wendestelle von h_a an der Stelle t ist $h_a''(t) = 0$ und $h_a'''(t) \neq 0$.

$h_a''(t) = 3t - 14a$

$\Longrightarrow h_a'''(t) = 3 \neq 0.$

$3t - 14a = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{14}{3}a$

Somit liegt bei $t_W = \frac{14}{3}a$ eine Wendestelle von h_a vor.

(2) Die stärkste Änderung der Gesamtzuflussrate entspricht dem Maximum des Betrags von h_a'. Dieses kann entweder an der Wendestelle von h_a oder am Rand des Beobachtungsbereichs angenommen werden.

(2) 1. SCHRITT: WERT DER 1. ABLEITUNG AM WENDEPUNKT BESTIMMEN

$h_a'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 14at + 24a^2$

$\Longrightarrow h_a'(t_w) = \dfrac{98}{3}a^2 - \dfrac{196}{3}a^2 + 24a^2 = -\dfrac{26}{3}a^2 \Longrightarrow |h_a'(t_W)| = \dfrac{26}{3}a^2.$

(2) 2. SCHRITT: STEIGUNG AN DEN RÄNDERN BERECHNEN

$h_a'(0) = 24a^2$

$h_a'(6a) = 54a^2 - 84a^2 + 24a^2 = -6a^2 \Longrightarrow |h_a'(6a)| = 6a^2.$

Der Betrag von h_a' ist somit bei $t = 0$ am größten. Die stärkste Änderung der Zuflussrate erfolgt also zu Beginn der Beobachtungszeit.

(3) BEDEUTUNG DER WENDESTELLE

Die Funktion h_a' nimmt bei t_W ihr Minimum an und ihr Wert ist dort negativ. Die Wendestelle t_W ist daher der Zeitpunkt, zu dem die Gesamtzuflussrate (gegeben durch h_a) am schnellsten abnimmt.

c)

(1) 1. SCHRITT: ENTSCHEIDUNG TREFFEN

$h_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t + 740$ hat als Stammfunktion $H_4(t) = \frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 + 740t$. Daher ist nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_0^{24} h_4(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 + 740t\right]_0^{24} = 40800 > 20000.$$

Das Staubecken wird daher überlaufen.

(2) 1. SCHRITT: BEDEUTUNG DER LÖSUNG IM SACHZUSAMMENHANG

10,65 Stunden (das sind 10 Stunden und 39 Minuten) nach Beginn der Beobachtungszeit werden 20 000 m^3 Wasser in das Becken geflossen sein. Zum Zeitpunkt b beginnt das Staubecken überzulaufen.

(3) 1. SCHRITT: KAPAZITÄT DES BECKENS ZUM ZEITPUNKT $t = 10$ BERECHNEN

$$20000 - \int_0^{10} h_4(t)\mathrm{d}t = 20000 - \left|\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 + 740t\right|_0^{10} \approx 1483{,}3.$$

(3) 2. SCHRITT: ZUFLUSS BIS ZUM ZEITPUNKT $t = 14$ BERECHNEN

Vom Zeitpunkt $t = 10$ an fließen $\left(\frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t + 740\right)\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ zu und 2000 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ ab. Das heißt, die neue Funktion z_4 für die Zuflussrate lautet:

$z_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t - 1260$. Im Zeitraum $10 \leq t \leq 14$ fließt also folgende Wassermenge in den Staubecken:

$$\int_{10}^{14} z_4(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 - 1260t\right]_{10}^{14} \approx 666{,}7\ [\mathrm{m}^3].$$

(3) 3. SCHRITT: KONSEQUENZ

Im Zeitraum $10 \leq t \leq 14$ fließen bei geöffnetem Notablauf etwa 666,7 m^3 zu, während das Becken zum Zeitpunkt $t = 10$ noch Platz für 1483,3 m^3 hat. Für die Zeit $t > 14$ läuft mehr Wasser ab als zu. Das Staubecken wird somit im Beobachtungszeitraum nicht überlaufen.