Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Stochastik

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: LAPLACE-WAHRSCHEINLICHKEIT

Jede Möglichkeit ist gleich wahrscheinlich. Wir berechnen daher die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses indem wir die Anzahl der für das Ereignis günstigen Möglichkeiten durch die Anzahl aller möglichen Ausgänge des Experiments teilen.

2. SCHRITT: ANZAHL DER GÜNSTIGEN EREIGNISSE

Für das erste Päckchen gibt es 200 Möglichkeiten, ein Bild auszuwählen. Da alle fünf Bilder verschieden sein sollen, hat man für das zweite Päckchen nur noch 199 Möglichkeiten, für das dritte nur noch 198 usw.

Das macht bei fünf Päckchen $200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196$ „günstige“ Möglichkeiten.

3. SCHRITT: ANZAHL DER MÖGLICHEN EREIGNISSE

Hier müssen die Bilder nicht unterschiedlich sein, also hat man für jedes Päckchen 200 Möglichkeiten. Bei fünf Päckchen macht das 200^5 Möglichkeiten.

Daraus folgt: $P(5 \text{ verschiedene Tierbilder}) = \dfrac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$.

b)

Sei E das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir bestimmen sollen. Für E günstige Möglichkeiten: Da der Junge schon 185 Bilder hat, gibt es für jedes der 10 neuen Bilder 185 Möglichkeiten, mit einem der bereits im Sammelalbum vorhandenen Bilder übereinzustimmen. Hier können

Bilder auch wiederholt gezogen werden, also kommen wir auf 185^{10} „günstige" Möglichkeiten. Die Gesamtzahl aller möglichen Ausgänge ist 200^{10}, nämlich bei jedem der insgesamt 10 neuen Bilder 200 Möglichkeiten.

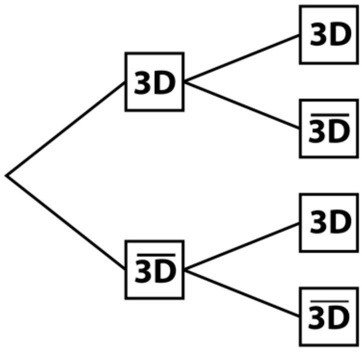
Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit von E:

$$P(E) = 185^{10} : 200^{10} = \left(\frac{185}{200}\right)^{10} = \left(\frac{37}{40}\right)^{10} \approx 0{,}459.$$

c)

1. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN

Bei jedem Päckchen gibt es zwei mögliche Ausgänge: entweder es enthält ein 3D-Bild oder nicht. Wir haben also eine Bernoullikette. Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht die Situation:



Die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein 3D-Bild soll mehr als 99% betragen, also muss die Wahrscheinlichkeit für kein 3D-Bild weniger als 1% sein.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER PFADWAHRSCHEINLICHKEITEN

Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem Päckchen kein 3D-Bild befindet:

Der Anteil an 3D Bildern liegt bei 0,1. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 5 Bildern kein einziges 3D-Bild ist: $0{,}9^5 = 0{,}59049$.

3. SCHRITT: RECHNUNG

$0{,}59049^n < 0{,}01$	beide Seiten logarithmieren
$\ln\left(0{,}59049^n\right) < \ln(0{,}01)$	linke Seite umformen
$n \cdot \ln(0{,}59049) < \ln(0{,}01)$	$\mid : \ln(0{,}59049)$

Vorsicht: ln(0,59049) ist eine negative Zahl. Du musst das Ungleichheitszeichen umdrehen, wenn du beide Seiten durch diese Zahl teilst!

Du erhältst

$$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}59049)} \approx 8{,}74.$$

Ein Kind benötigt also mindestens 9 Päckchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein 3D-Bild zu bekommen.

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: BERECHNUNG DES ÖFFNUNGSWINKELS

Wenn die Größe der Sektoren proportional zu ihrem Zahlenwert sind, dann ist Sektor 1 eine Einheit groß, Sektor 2 zwei Einheiten usw. Das macht insgesamt 1 +2 +…+ 5 = 15 Einheiten. Eine Einheit entspricht demnach einem Öffnungswinkel von 360 ° : 15 = 24 °. Dies ist also der Öffnungswinkel von Sektor 1.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER WAHRSCHEINLICHKEIT

Wenn die 1 einen Winkel von 24° hat, dann hat die 5 einen Winkel von 5 · 24 ° = 120 °. 120° ist 1/3 von 360 °. Da die Wahrscheinlichkeit eines Sektors proportional zu seinem Öffnungswinkel ist und die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 gleichmäßig auf die 360 ° verteilt sind, hat somit Sektor 5 die Wahrscheinlichkeit 1/3.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Eintrittskarte zu gewinnen ist also 1/3.

b)

1. SCHRITT: BERECHNUNG DES ERWARTUNGSWERTS

Bezeichne mit X die Auszahlung nach einem Spiel und tabelliere die möglichen Werte von X mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

x	1	2	3	4	15
$P(X = x)$	1/15	2/15	3/15 = 1/5	4/15	5/15 = 1/3

Diese Werte setzt du nun in die Formel für den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 15 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= 7.$$

2. SCHRITT: INTERPRETATION

Da der Supermarkt pro Spiel 6 Euro einnimmt, aber im Schnitt 7 Euro auszahlt, wird der örtliche Kindergarten mit dieser Veranstaltung wahrscheinlich kein Geld einnehmen, sondern eher Verluste machen.

c)

Der Erwartungswert der Auszahlung ist jetzt:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 10 \cdot \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$$
$$\approx 5{,}33.$$

Bei Einnahmen von 6 Euro pro Spiel ergibt sich ein durchschnittlicher Überschuss von $\frac{2}{3}$ Euro pro Spiel. Das macht bei 6000 Spielen einen Überschuss von $\frac{2}{3} \cdot 6000 = 4000$ Euro, den der Kindergarten in etwa erwarten kann.