Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Stochastik

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUFSTELLEN

Bezeichnungen:

M Mädchen

J Junge

F Fernsehgerät

$\overline{F}$ kein Fernsehgerät

	M	J	gesamt
F	54	65	119
$\overline{F}$	44	37	81
gesamt	98	102	200

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

$P(\overline{F} \cap M) = \frac{44}{200} = 0{,}22.$

b)

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUFSTELLEN

s.o.

2. SCHRITT: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

$P(M \cap F) = \frac{54}{200}$ und $P(F) = \frac{119}{200}$, also ist $P(M|F) = \frac{54}{119} \approx 0{,}454$.

c)

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUFSTELLEN

s.o.

2. SCHRITT: STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT PRÜFEN

Die Bedingung für stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse F und M lautet:

$P(F) \cdot P(\mathrm{M}) = P(F \cap \mathrm{M})$.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sind sie stochastisch abhängig.

Aus der Vierfeldertafel ergibt sich

$$P(F) = \frac{119}{200} = 0{,}595,$$

$$P(M) = \frac{98}{200} = 0{,}49,$$

$$P(F \cap M) = \frac{54}{200} = 0{,}27 \text{ und}$$

$$P(F) \cdot P(M) = 0{,}29155 \neq 0{,}27.$$

Die beiden Ereignisse sind somit stochastisch abhängig.

d)

1. SCHRITT: WERT DER SUMME $\sum_{i=0}^{12} B(25; 0{,}55; i)$ NACHSCHLAGEN

Diesen Wert entnehmen wir der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung mit den Parametern $p = 0{,}55$, $n = 25$ und $k = 12$. Er beträgt

$$\sum_{i=0}^{12} B(25; 0{,}55; i) \approx 0{,}30632.$$

2. SCHRITT: INTERPRETATION

Dieser Wert ist im Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 25 Mädchen im Alter zwischen 12 und 19 Jahren höchstens 12 (also weniger als die Hälfte) ein Fernsehgerät besitzt. Zum Einen kann das Modell von der Wirklichkeit abweichen und zum anderen ist die spezielle Auswahl von 25 Schülerinnen einer 9. Klasse nicht unbedingt repräsentativ für alle Mädchen zwischen 12 und 19 Jahren. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn die Besitzerinnen von Fernsehgeräten über die verschiedenen Altersklassen gleichmäßig verteilt sind.

Wahrscheinlicher ist es aber, dass beispielsweise unter den 19-jährigen mehr Mädchen Fernsehgeräte besitzen als unter den 12-jährigen.

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: H_0 UND H_1 FESTLEGEN

Als Nullhypothese nehmen wir die Annahme, dass tatsächlich weniger als 90% der Jugendlichen der Kleinstadt einen Computer besitzen. Diese Annahme nennen wir H_0. Um die Formulierungen zu verkürzen führen wir die Abkürzung p für die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Jugendlicher der Kleinstadt einen Computer besitzt. H_0 lautet also jetzt: $p < 0{,}9$. Dementsprechend lautet die Gegenhypothese H_1: $p \geq 0{,}9$.

Bezeichnen wir nun noch die Anzahl der befragten Jugendlichen, die einen Computer besitzen, mit x. Da 100 Personen befragt werden, liegt x zwischen 0 und 100. Wir müssen entscheiden, für welche x wir H_0 annehmen bzw. ablehnen, und zwar unter Berücksichtigung der in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen.

2. SCHRITT: SKIZZE FÜR DEN ANNAHMEBEREICH

H_0 behauptet, dass p klein ist und wenn dem so ist, dann erwarten wir, dass auch x klein ausfällt. Der Annahmebereich ist also der linke Abschnitt der Ereignismenge aller Möglichkeiten, die für x in Frage kommen:

[0;1;……………….……….........c;$c+1$;………………………………..100]

Annahmebereich für H_0 Ablehnungsbereich für H_0

In der Skizze ist c das größte x, bei dem wir H_0 noch annehmen.

3. SCHRITT: c BESTIMMEN

Es genügt, die Bedingung $P(x < c) \leq 0{,}05$ für den Fall $p = 0{,}9$ zu erfüllen.

In der Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen zu den Parametern $p = 0{,}9$ und $n = 100$ suchen wir den größten Wert für k, bei dem die Wahrscheinlichkeit $P(x < k) \leq 0{,}05$ ausfällt. Wir erhalten $c = 84$.

4. SCHRITT: ENTSCHEIDUNGSREGEL FORMULIEREN

Die finanziellen Mittel werden bewilligt, wenn bei der Befragung höchstens 84 Jugendliche angeben, einen Computer zu besitzen.

b)

1. SCHRITT: ANTEIL DER COMPUTERBESITZER

Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 100$, $k = 85$ und einem p, das noch ermittelt werden muss.

Im Modell ist p der Anteil der Jugendlichen in der Kleinstadt, die einen Computer besitzen. Nach Vorgabe ist p somit gleich dem Anteil der Computerbesitzer(innen) unter den in der Tabelle erfassten Jugendlichen. Das sind 77 Mädchen und 87 Jungen, also insgesamt 164 von den 200 Jugendlichen. Demnach ist $p = 0{,}82$.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT

Die Formel für die Binomialverteilung lautet:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Wir setzen also die Parameter ein, die wir oben zusammengestellt haben und erhalten

$$P(X = 85) = \binom{100}{85} \cdot 0{,}82^{85} \cdot 0{,}18^{15} \approx 0{,}08.$$

Aufgabe 3

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUFSTELLEN

s.o.

2. SCHRITT: STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT PRÜFEN

Wir bezeichnen mit S die Smartphonebesitzer und mit K die Konsolenbesitzer.

Und hier die (unvollständigen) Vierfeldertafeln:

In absoluten Zahlen:

	K	$\overline{K}$	
S			94
$\overline{S}$			106
	99	101	200

In Wahrscheinlichkeiten

	K	$\overline{K}$	
S	x		0,47
$\overline{S}$			0,53
	0,495	0,505	1

S und K sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$P(S) \cdot P(K) = P(S \cap K)$, also $P(S \cap K) = 0{,}47 \cdot 0{,}495 = 0{,}23265$.

3. SCHRITT: BESTIMMUNG DES MINDESTWERTES

Mindestens 47 Jugendliche müssen sowohl ein Smartphone als auch eine Spielekonsole besitzen.