Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Geometrie

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: BERECHNUNG DER VEKTOREN $\overrightarrow{AB}$ UND $\overrightarrow{AC}$

Den Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum berechnest du mit der Formel

$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Dabei sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren von einem beliebigen Punkt des Dreiecks zu den beiden anderen Punkten. Dazu brauchst du

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: BERECHNUNG DES VEKTORPRODUKTS

Die Formel für die Berechnung des Vektorproduktes liefert

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

3. SCHRITT: BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ist die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$, also ist

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86.$$

b)

1. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG

$g: \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{v}$ oder besser $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (als Richtungsvektor genügt jedes Vielfache von $\vec{v}$, wir nehmen das (-1)-fache).

2. SCHRITT: ALLGEMEINEN PUNKT DER GERADE IN DIE EBENENGLEICHUNG EINSETZEN

Jeder Punkt der Geraden g hat Koordinaten $(2 + \lambda|2 + \lambda|3 + 4\lambda)$ für ein λ.

In die Gleichung von E eingesetzt liefert das

$2 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + 4\lambda = 4 \Leftrightarrow 7 + 6\lambda = 4$.

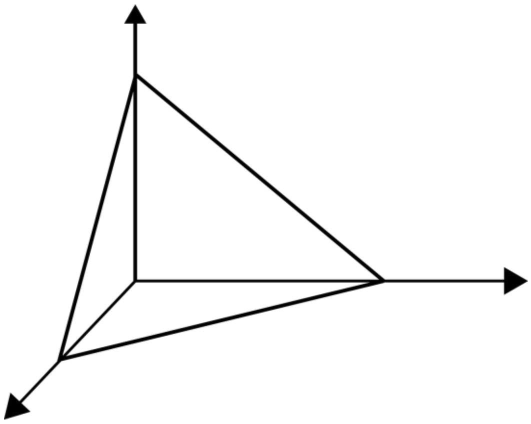
3. SCHRITT: PARAMETER BERECHNEN

Diese Gleichung lösen wir nach λ auf und erhalten $\lambda = -0{,}5$.

4. SCHRITT: KOORDINATEN VON R BERECHNEN

Diesen Wert für λ setzen wir in die Geradengleichung ein um die Koordinaten von R zu erhalten. Das Ergebnis ist $R(1{,}5|1{,}5|1)$.

5. SCHRITT: SKIZZE



6. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Wie man an der Skizze leicht erkennen kann, ist das Dreieck der Teil der Ebene, der komplett im ersten Oktanten liegt. Da der Punkt R in der Ebene liegt und ebenfalls im ersten Oktanten, muss er auf dem Dreieck liegen.

c)

1. SCHRITT: GLEICHUNG DER GERADEN DURCH P UND Q AUFSTELLEN

Zwei Punkte P und Q sind bezüglich einer Ebene E symmetrisch, wenn die Gerade h, die durch die beiden Punkte geht, folgende Eigenschaften hat:

1. h schneidet E im Mittelpunkt der Strecke $[PQ]$.
2. Der Schnittwinkel von h mit E beträgt 90 °, d.h. h steht senkrecht auf E.

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nimm als Richtungsvektor lieber das $\left(-\frac{1}{2}\right)$-fache davon, nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Unsere Gerade h ist demnach gegeben durch $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. SCHRITT: SCHNITTPUNKT GERADE–EBENE FINDEN

Dazu müssen wir einen allgemeinen Punkt der Gerade in die Ebenengleichung einsetzen.

Ein allgemeiner Geradenpunkt von g hat die Form $(2 + \mu|2 + \mu|3 + \mu)$.

In E eingesetzt liefert das die Gleichung

$2 + \mu + 2 + \mu + 3 + \mu = 4 \Leftrightarrow \mu = -1$.

Jetzt musst du $\mathbf{-1}$ für $\boldsymbol{\mu}$ in den allgemeinen Geradenpunkt einsetzen, das liefert die Koordinaten des Schnittpunktes: $S(1|1|2)$.

3. SCHRITT: MITTELPUNKT DER STRECKE [*PQ*] BESTIMMEN

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind die Mittelwerte der Koordinaten von P und Q.

$x_1 = (2 + 0) : 2 = 1$

$x_2 = (2 + 0) : 2 = 1$

$x_3 = (3 + 1) : 2 = 2$

Das sind exakt die Koordinaten von S. Damit ist Bedingung 1) geprüft.

4. SCHRITT: GEGENSEITIGE LAGE GERADE–EBENE BESTIMMEN

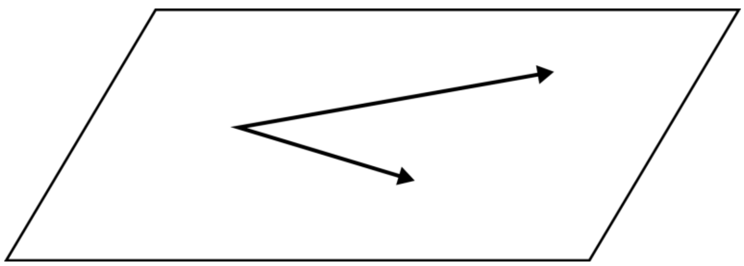
Die Gerade g muss senkrecht auf die Ebene E stehen. Das ist dann der Fall, wenn der Normalenvektor der Ebene parallel zum Richtungsvektor der Geraden verläuft.

Ist die Ebenengleichung in Koordinatenform angegeben, kann man den Normalenvektor einfach ablesen. Er besteht aus den Koeffizienten vor den Koordinaten.

$E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ hat demnach den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Richtungsvektor der Geraden ist ebenfalls $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also steht die Gerade senkrecht auf die Ebene und Bedingung 2) ist somit auch erfüllt. Die Punkte P und Q sind also bezüglich der Ebene E symmetrisch.

d)

1. SCHRITT: SKIZZE



2. SCHRITT: EBENENGLEICHUNG IN PARAMETERFORM

Der Aufpunkt ist mit dem Punkt R gegeben. Als Richtungsvektoren können wir die Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ nehmen.

$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, wir nehmen der Einfachheit halber das Doppelte: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, wir nehmen lieber: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: UMWANDELN IN NORMALENFORM

Für die Normalenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ brauchen wir die Parameter a, b, c und d.

a, b und c sind die Komponenten des Normalvektors der Ebene, den wir mit dem Vektorprodukt aus den beiden Richtungsvektoren der Ebene berechnen.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

F hat also eine Gleichung der Form $-4x_1 + 4x_2 + 0x_3 + d = 0$.

Um d zu bestimmen, setzt du den Aufpunkt aus der Parametergleichung in diese Gleichung ein:

$-4 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 1{,}5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0.$

Somit lautet die Normalenform wie folgt:

$F = -4x_1 + 4x_2 = 0$ oder äquivalent $F\colon x_1 - x_2 = 0.$

4. SCHRITT: BESTIMMUNG DER LAGE DES EINFALLSLOTS

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie parallel zur Ebene verläuft und ein Punkt der Gerade auch auf der Ebene liegt. Parallel zu einer Ebene verläuft eine Gerade, wenn ihr Richtungsvektor und der Normalenvektor der Ebene einen rechten Winkel bilden, d.h. das Skalarprodukt des Richtungsvektors und des Normalenvektors muss 0 sein.

Das Einfallslot ist senkrecht zur Ebene E, d.h. als Richtungsvektor des Lots kannst du den Normalenvektor der Ebene E nehmen. Somit hat das Lot den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor von F ist $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Berechne das Skalarprodukt: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0=0$.

Somit ist das Lot parallel zu Ebene F.

Außerdem ist der Punkt R sowohl Element der Ebene F als auch des Einfallslots. Also muss das Lot in der Ebene F liegen.

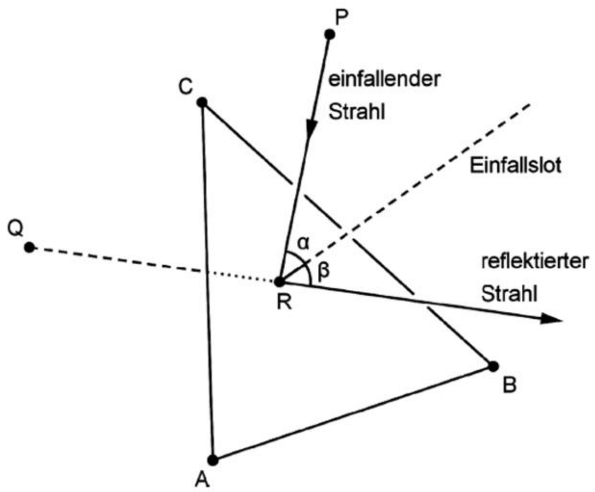
e)

1. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN

Für den Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|a|\cdot|b|}$.

2. SCHRITT: BESTIMMEN DER VEKTOREN

Werfen wir nochmal einen Blick auf die Skizze aus der Angabe:



Wir stellen den einfallenden Strahl durch den Vektor $\vec{a} = -\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dar,

den reflektierten Strahl durch $\vec{b} = -\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QR}$ und das Einfallslot durch

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s.o.).

Berechnen wir zuerst $\vec{b} = \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. SCHRITT: VERGLEICH DER WINKEL

Einerseits ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+16} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Andererseits ist

$$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 0} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{13{,}5}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos(\alpha).$$

(Der Wert ist etwa 0,82.) Aus der Skizze wissen wir, dass α und β beide zwischen 0 und 90 ° liegen und in diesem Bereich ist jeder Winkel eindeutig durch seinen Kosinus bestimmt. Somit folgt aus $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ die gewünschte Gleichung $\alpha = \beta$. (Der Wert ist etwa 35,26 °.)

Bemerkung:

Es wird in der Prüfung wahrscheinlich nicht verlangt, dass du dieses letzte Argument genau ausführst. Die 4 BE bekommst du vermutlich schon für die Berechnung der Einzelwinkel mit der $\cos^{-1}$-Taste auf dem Taschenrechner und dem direkten Vergleich innerhalb der Genauigkeit der Anzeige.