Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Analysis

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: DEFINITIONSBEREICH BESTIMMEN

Bei einem Bruch darf der Nenner nicht null werden, d.h. es muss gelten: $x^2 - 25 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 25 \Leftrightarrow |x| \neq 5 \Leftrightarrow x \notin \{-5{,}5\}$. Ansonsten gibt es keine Einschränkung.

2. SCHRITT: SYMMETRIE NACHWEISEN

Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs bedeutet, dass

$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.

Das prüfen wir wie folgt:

$$f(-x) = \frac{20(-x)}{(-x)^2 - 25} = -\frac{20x}{x^2 - 25} = -f(x).$$

Somit ist die Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs nachgewiesen.

3. SCHRITT: NULLSTELLE FINDEN

$$\frac{20x}{x^2 - 25} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 20x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

4. SCHRITT: ASYMPTOTEN BESTIMMEN

Zähler und Nenner sind Polynome, deren Grad jeweils die höchste vorkommende Potenz der Variablen ist. Bezeichnen wir mit d_Z den Grad des Zählers und mit d_N den Grad des Nenners.

1. Senkrechte Asymptoten sind genau die senkrechten Geraden durch die Definitionslücken, also durch die Nullstellen des Nenners. In unserem Fall haben wir senkrechte Asymptoten bei $x = -5$ und bei $x = 5$.
2. Eine schräge Asymptote gibt es genau dann, wenn $d_Z = d_N + 1$ ist. Dies ist hier nicht der Fall, also hat f keine schräge Asymptote.
3. Eine waagrechte Asymptote kommt genau dann vor, wenn $d_Z \leq d_N$ ist. Desweiteren ist diese waagrechte Asymptote genau dann die x-Achse wenn $d_Z < d_N$ ist. Genau dieser Fall liegt hier vor, d.h. f hat als waagrechte Asymptote die Gerade $y = 0$.

b)

1. SCHRITT: BERECHNUNG DER 1. ABLEITUNG

Wir bestimmen die 1. Ableitung mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{20(x^2-25)-20x\cdot 2x}{(x^2-25)^2} = \frac{-20x^2-500}{(x^2-25)^2}$$

2. SCHRITT: INTERVALLE, IN DENEN DIE 1. ABLEITUNG NEGATIV IST

Ein Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben. Der Nenner ist hier ein Quadrat, also innerhalb der Definitionsmenge von f immer positiv.

Der Zähler: $-20x^2 - 500$ ist ein Term, der für alle x negativ ist. Daher ist die Ableitung für alle $x \in D_f$ negativ und somit die Steigung von G_f in jedem Punkt des Graphen negativ.

3. SCHRITT: BERECHNE DIE 1. ABLEITUNG AN DER STELLE 0

Der Schnittwinkel, unter dem der Graph die x-Achse schneidet, ergibt sich aus der Steigung der Tangenten an der Nullstelle. Die Tangentensteigung berechnen wir mit der ersten Ableitung

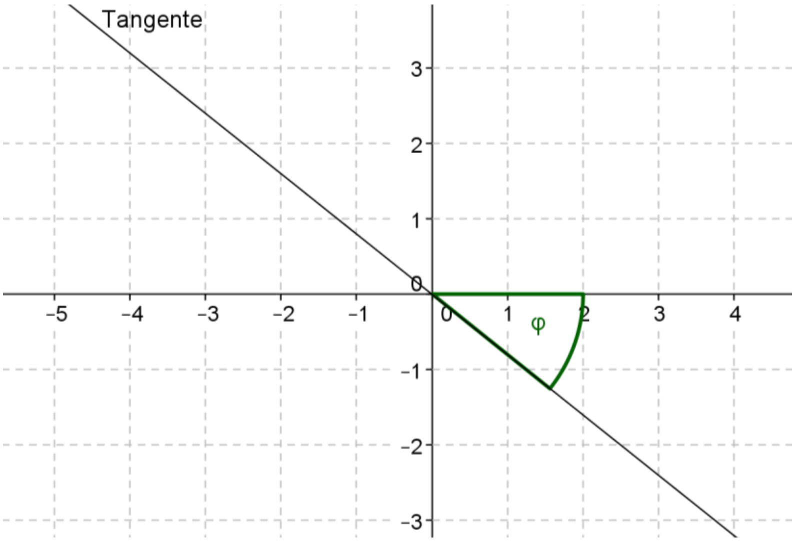
$$f'(x) = \frac{-20x^2-500}{(x^2-25)^2}\ .$$

Die Nullstelle haben wir schon bestimmt, sie liegt bei $x = 0$. Einsetzen liefert zunächst die Steigung der Tangenten:

$f'(0) = -0{,}8$.

4. SCHRITT: BERECHNUNG DES WINKELS

Die Tangentensteigung entspricht dem Tangens des Winkels φ, unter dem die Tangente die x-Achse schneidet:

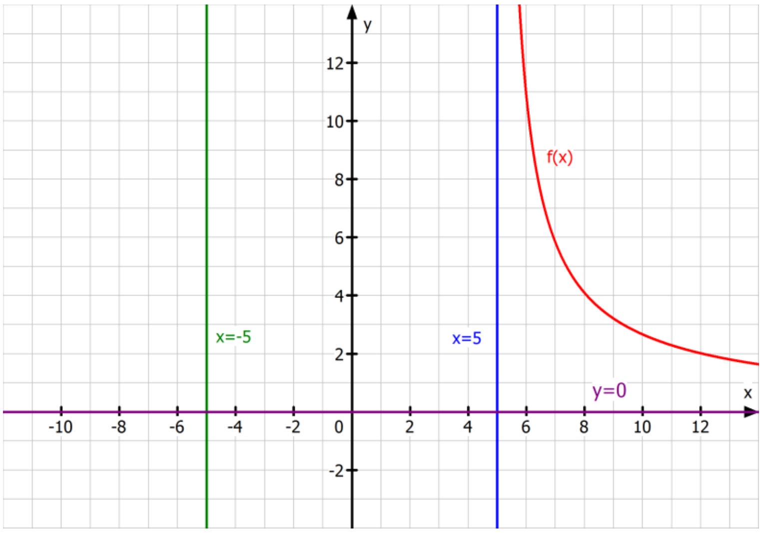


Es gilt $\tan(\varphi) = -0{,}8 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-0{,}8) \approx -38{,}65\,°$, wenn man den Winkel gegen den Uhrzeigersinn orientiert. Gesucht ist aber der unorientierte Schnittwinkel, also der Betrag des kleineren der beiden Scheitelwinkel zwischen Tangente und x-Achse, hier also etwa $38{,}65\,°$.

c)

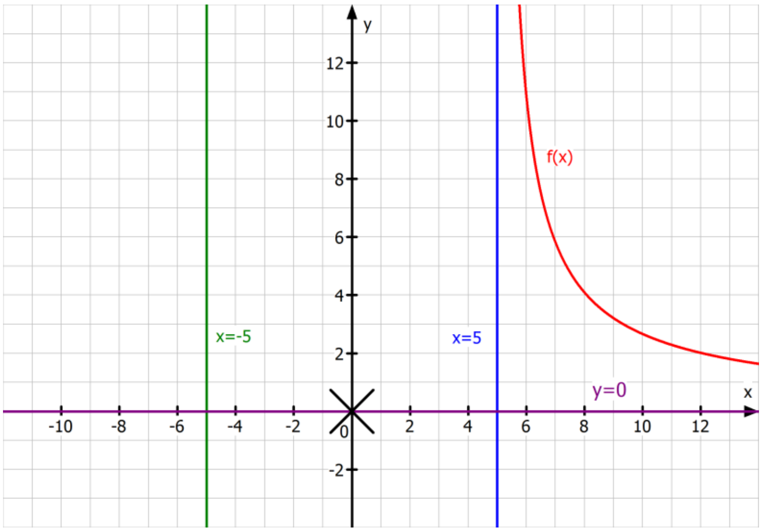
1. SCHRITT: EINZEICHNEN DER ASYMPTOTEN

Die drei Asymptoten, die wir in Teilaufgabe a) bestimmt haben, waren gegeben durch die Gleichungen $x = -5$, $x = 5$ und $y = 0$.



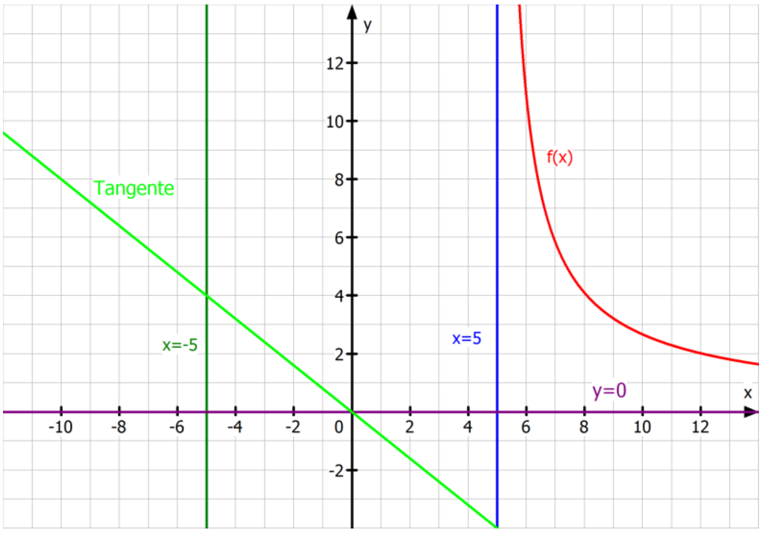
2. SCHRITT: EINZEICHNEN DER NULLSTELLE

Die Nullstelle war nach Teilaufgabe a) bei $x = 0$.



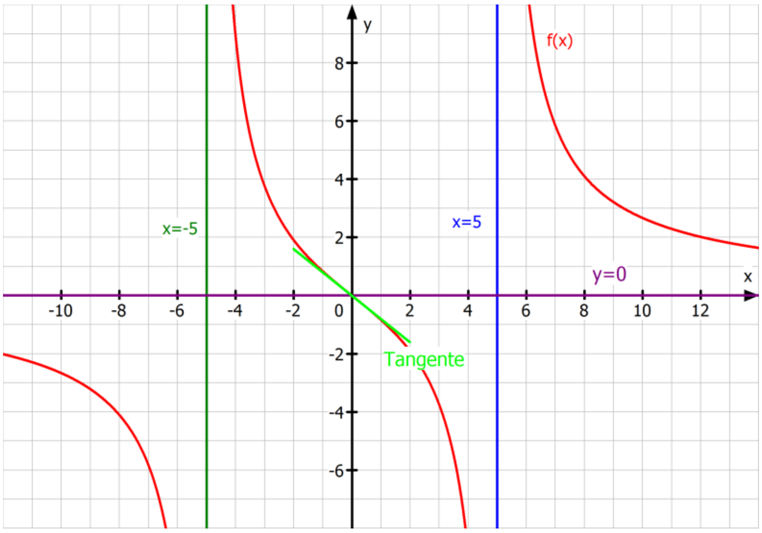
3. SCHRITT: SCHNITTWINKEL DER NULLSTELLE SKIZZIEREN

In Teilaufgabe b) haben wir gesehen, dass die Tangente an der Nullstelle die Steigung $-0{,}8$ hat und offenbar geht sie durch den Ursprung (wegen $f(0) = 0$). Somit geht die Tangente durch die Punkte $(0|0)$ und $(5|-4)$ und kann in einer geeigneten Umgebung des Ursprungs in die Skizze eingezeichnet werden.



4. SCHRITT: BERÜCKSICHTIGUNG VON MONOTONIE UND SYMMETRIE

Den Graphen links von der Asymptote $x = -5$ erhält man durch Drehung des Abschnitts im 1. Quadranten um den Ursprung um 180 °. Zwischen den senkrechten Asymptoten müssen wir eine glatte Kurve einzeichnen, die links gegen ∞ und rechts gegen $-\infty$ strebt, außerdem muss sie sich in der Nähe des Ursprungs an den eingezeichneten Tangentenabschnitt anschmiegen.



d)

1. SCHRITT: UMKEHRBARKEIT PRÜFEN

Eine Funktion f mit Definitionsbereich D und Wertebereich W ist genau dann umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in W$ nur ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt. Diese Bedingung ist in unserem Fall nicht erfüllt, denn

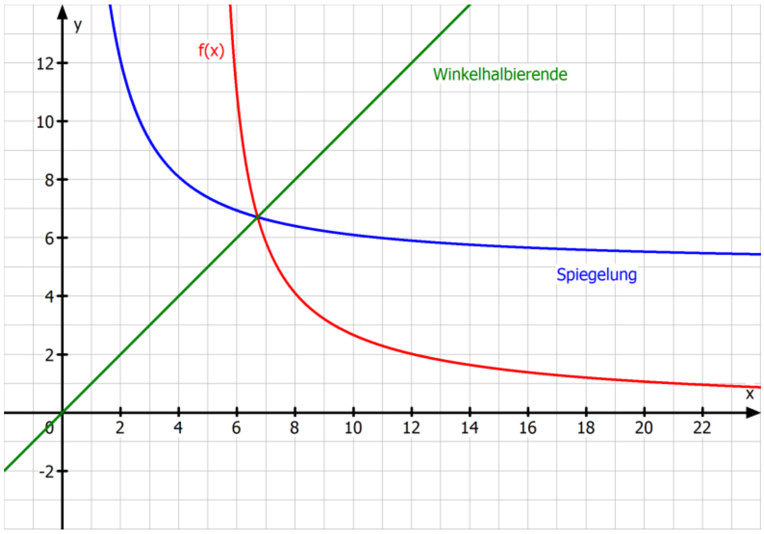
$$\lim_{x \searrow -5} f(x) = \infty = \lim_{x \searrow 5} f(x),$$

also werden alle hinreichend großen Werte mindestens zweimal erreicht, nämlich in der Nähe jeder senkrechten Asymptote. Somit ist f nicht umkehrbar.

Um zu zeigen, dass f^* umkehrbar ist, genügt es nachzuprüfen, dass f^* streng monoton ist. Aus Teilaufgabe b) wissen wir aber schon, dass f' überall negativ ist, ferner ist auf $]5;+\infty[$ $f^{*\prime} = f'$. Somit ist f^* auf dem ganzen Intervall $]5;+\infty[$ streng monoton fallend und daher umkehrbar.

2. SCHRITT: ZEICHNUNG

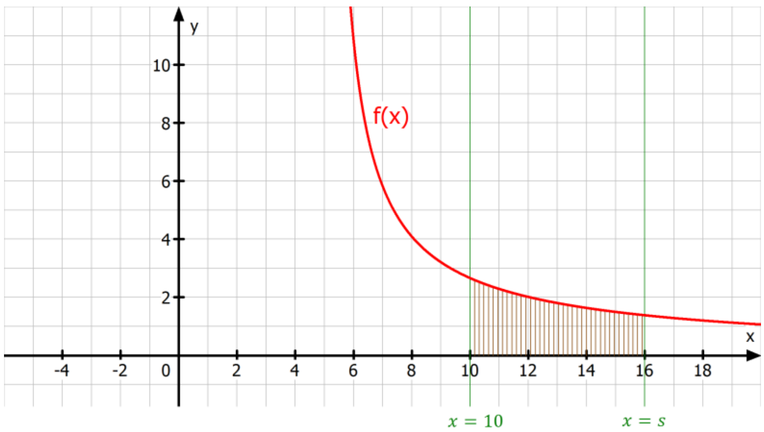
Graphisch ist die Umkehrfunktion die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.



e)

1. SCHRITT: SKIZZE

Wir nehmen beispielhaft den Wert $x = 16$ für unsere Skizze.



$x = 10$ $\qquad\qquad$ $x = s$

2. SCHRITT: STAMMFUNKTION FINDEN

$$\int \frac{20x}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x = 10\int \frac{2x}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2 - 25)'}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x$$
$$= 10\ln|x^2 - 25| + C,$$

wie man der Formelsammlung entnimmt. Der Einfachheit halber wählen wir als Stammfunktion $10\ln|x^2 - 25|$.

3. SCHRITT: BERECHNUNG $A(s)$

$$A(s) = 10\int_{10}^{s} \frac{2x}{x^2 - 25}\,\mathrm{d}x = 10(\ln|s^2 - 25| - \ln|75|).$$

Da $s > 10$ vorausgesetzt wird, ist sichergestellt, dass das Argument in der Logarithmusfunktion positiv ist.

Bemerkung:

$\ln|s^2 - 25| - \ln|75| = \ln\left|\frac{s^2 - 25}{75}\right|$.

f)

$10 \cdot \ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) \overset{!}{=} 100$	$:10$
$\ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) = 10$	exponentieren
$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$	$\cdot 75$
$s^2 - 25 = 75e^{10}$	$+25$
$s^2 = 75e^{10} + 25$	Wurzel ziehen
$\lvert s \rvert = \sqrt{75e^{10}+25}$	Betragsstriche weglassen, da $s > 10 > 0$
$s = \sqrt{75e^{10}+25}$	

Als Ergebnis erhalten wir mit dem Taschenrechner $s \approx 1285{,}31$.

g)

Zu berechnen ist

$$\lim_{s\to\infty} 10 \cdot \ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right)$$

Offenbar geht der Zähler des Arguments im Logarithmus gegen ∞. Teilen durch eine endliche Größe wie 75 ändert an diesem Grenzverhalten nichts, d.h. das Argument des Logarithmus strebt ebenfalls gegen ∞. Bekanntlich ist die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend und unbeschränkt (obwohl sie nur sehr langsam ansteigt), also ist

$$\lim_{s\to\infty} \ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) = \infty$$

und somit auch

$$\lim_{s\to\infty} 10 \cdot \ln\left(\frac{s^2-25}{75}\right) = \infty.$$

Aufgabe 2

a)

Wir müssen nur die x-Werte in die Formel einsetzten und dann von Stunden in Minuten umrechnen:

$$t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} \text{ und}$$

$$t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{80}{75} = \frac{16}{15}$$

Eine Stunde beträgt 60 Minuten, also sind $\frac{8}{3}$ Stunden $\frac{8}{3} \cdot 60 = 8 \cdot 20 = 160$ Minuten. $\frac{16}{15}$ Stunden sind dementsprechend $\frac{16}{15} \cdot 60 = 16 \cdot 4 = 64$ Minuten.

Bei einer Eigengeschwindigkeit von 10 km/h dauert die Fahrt also 160 Minuten und bei einer Eigengeschwindigkeit von 20 km/h nur 64 Minuten.

b)

Die Eigengeschwindigkeit des Boots beträgt x km/h. Also benötigt das Boot für 10 km auf stillem Wasser $\frac{10}{x}$ Stunden. Die Geschwindigkeit des Wassers beträgt 5 km/h. Für die Fahrt flussabwärts addieren sich die Geschwindigkeiten, das Boot fährt also effektiv mit der Geschwindigkeit $x + 5$ km/h, so dass sich für die Hinfahrt der Term $\frac{10}{x+5}$ ergibt. Für die Fahrt gegen den Strom müssen die Geschwindigkeiten subtrahiert werden, das Boot bewegt sich also effektiv mit der Geschwindigkeit $x - 5$ km/h und es kommt als Term für die Rückfahrt noch $\frac{10}{x-5}$ hinzu.

c)

Für $x < 5$ ist die Eigengeschwindigkeit des Boots kleiner als die Fließgeschwindigkeit des Wassers. Somit reicht die Motorleistung nicht aus, um das Boot gegen die Strömung zum Ausgangspunkt zurück zu führen, d.h. die Rückfahrt wird nie beendet. $t(x)$ hingegen gibt für diesen Fall eine endliche Gesamtfahrtzeit vor.

d)

Wir müssen die beiden Brüche so erweitern, dass sie als Nenner $(x + 5)(x - 5)$ haben:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} \\ &= \frac{10(x-5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{10(x+5)}{(x-5)(x+5)} \\ &= \frac{10x-50}{x^2-25} + \frac{10x+50}{x^2-25} = \frac{20x}{x^2-25} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass die Funktionen t und f auf ihrem ganzen gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen.

e)

1. SCHRITT: INFORMATIONEN NOTIEREN

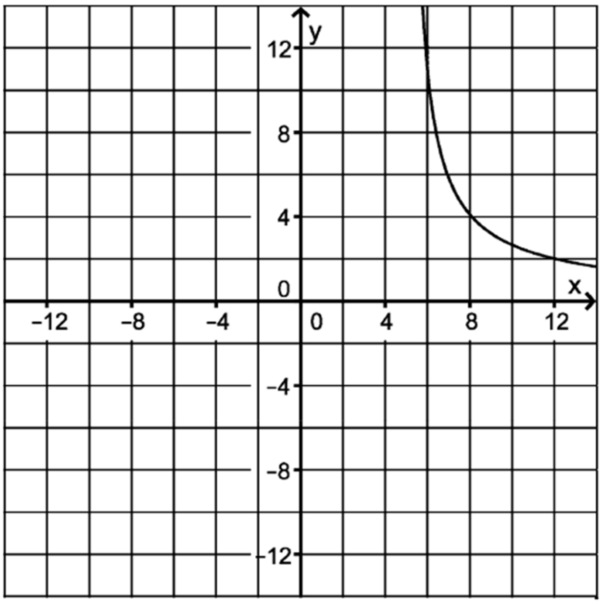
Natürlich geht es um die Funktion $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$ bzw.

$$t(x) = \frac{20x}{x^2 - 25}.$$

Außerdem soll die Gesamtfahrtzeit auf zwei bis vierzehn Stunden begrenzt sein. Das bedeutet für die Wertemenge: $2 < y < 14$.

2. SCHRITT: WAS IST GEFRAGT?

Nach Aufgabe 2d) zeigt die Abbildung aus Aufgabe 1) den Graphen der Funktion t:



Um damit die Eigengeschwindigkeit x aus einer vorgegebenen Gesamtfahrtzeit zu bestimmen, zeichnen wir die waagrechte Gerade G_1 mit der gewünschten Höhe y in die Abbildung und betrachten dann den Schnittpunkt S von G_1 mit dem eingezeichneten Teil des Graphen von f. Die x-Koordinate von S ist dann die zugehörige Eigengeschwindigkeit.

3. SCHRITT: ALLGEMEINE RECHNUNG

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen müssen wir die Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen vertauschen.

$y = \dfrac{20x}{x^2 - 25}$	$\mid \cdot (x^2 - 25)$
$y(x^2 - 25) = 20x$	ausmultiplizieren
$yx^2 - 25y = 20x$	$\mid -20x$
$yx^2 - 20x - 25y = 0$	Diese quadratische Gleichung besitzt für jedes $y > 2$ zwei Lösungen, die durch die allgemeine Lösungsformel gegeben sind.

$$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 100y^2}}{2y}$$

Der Schönheit halber klammern wir unter der Wurzel den Faktor 100 aus und ziehen ihn vor die Wurzel

$$x_{1/2} = \frac{20 \pm 10\sqrt{4 + y^2}}{2y} = \frac{10 \pm 5\sqrt{4 + y^2}}{y}$$

Jetzt müssen wir entscheiden, welche der beiden Zweige wir brauchen.

Nach Vorgabe soll die Gesamtfahrtzeit im Bereich zwischen 2 und 14 Stunden liegen. Die Fahrtzeit in Stunden wird im Moment noch mit y bezeichnet und wenn wir $y > 2$ in die letzte Gleichung einsetzen erkennen wir, dass der eine Zweig $x_1 = \frac{10 - 5\sqrt{4 + y^2}}{y}$ negativ wird. x soll aber die Eigengeschwindigkeit des Bootes sein und die Fahrt soll nach endlicher Zeit abgeschlossen sein, also muss diese Eigengeschwindigkeit positiv sein. Nach Teilaufgabe c) muss sogar $x > 5$ sein damit die Formel die Situation sinnvoll widerspiegelt. Also ist der andere Zweig der Richtige:

$x_2 = \frac{10 + 5\sqrt{4 + y^2}}{y}$. Jetzt müssen wir nur noch die Variablen vertauschen und die Standardbezeichnung für die Umkehrfunktion benutzen:

$$t^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \frac{10 + 5\sqrt{4 + x^2}}{x}.$$

4. SCHRITT: SPEZIELLE RECHNUNG

Um die Eigengeschwindigkeit bei einer Gesamtfahrtzeit von 4 Stunden zu berechnen, setzen wir in die eben gefundene Umkehrfunktion 4 ein:

$$t^{-1}(4) = f^{-1}(4) = \frac{10 + 5\sqrt{4 + 4^2}}{4} = \frac{10 + 5\sqrt{20}}{4} = \frac{5\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2} \approx 6{,}09.$$

Wenn die Gesamtfahrtzeit 4 h betragen soll, benötigt das Boot eine Eigengeschwindigkeit von etwa 6,09 km/h.