BundesabiturMathematik: Musterlösung

Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1: Analysis

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DEN KOORDINATENACHSEN

Die Koordinatenachsen haben die Gleichungen $x = 0$ (y-Achse) bzw. $y = 0$ (x-Achse). Setze also in der Funktionsgleichung einmal für x null ein und einmal für y.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2 - \sqrt{12} \approx -1{,}46$.

Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle):

$2 - \sqrt{12 - 2x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 2x} = 2$

$\Rightarrow 12 - 2x = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Probe:

$f(4) = 2 - \sqrt{12 - 2 \cdot 4} = 2 - \sqrt{4} = 0$.

2. SCHRITT: VERHALTEN FÜR $x \to -\infty$

Offenbar ist

$$\lim_{x \to -\infty} 12 - 2x = \infty,$$

d.h. der Radikand wächst unbeschränkt an. Da die Wurzelfunktion unbeschränkt streng monoton wächst, ist also

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{12 - 2x} = \infty$$

und somit

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2 - \sqrt{12 - 2x} = -\infty.$$

$f(6) = 2 - \sqrt{12 - 2 \cdot 6} = 2.$

b)

1. SCHRITT: ABLEITUNGSFUNKTION BESTIMMEN

Nach der Kettenregel ist die Ableitung von

$f(x) = 2 - \sqrt{12-2x}$ gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{12-2x}}\cdot(-2) = \frac{1}{\sqrt{12-2x}}.$$

2. SCHRITT: DEFINITIONSMENGE

Die Ableitungsfunktion ist genau dort definiert, wo der Term unter der Wurzel positiv ist (er darf nicht null sein weil er im Nenner steht).

$12 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 6.$

Also ist $D_{f'} = \{ x \in \mathbb{R} \,|x < 6\} =]-\infty; 6[$.

3. SCHRITT: GRENZWERT

Nur der linksseitige Grenzwert ist definiert. Offenbar ist

$$\lim_{x\to 6} 12 - 2x = 0$$

(da diese lineare Funktion stetig ist, genügt es einfach 6 einzusetzen). Wenn x von links gegen 6 strebt, geht der Term $12 - 2x$ von oben gegen null, d.h. er bleibt positiv. Da die Wurzelfunktion streng monoton wächst, strebt mit $12 - 2x$ auch $\sqrt{12-2x}$ von oben gegen null. Uns interessiert jetzt der Kehrwert $\frac{1}{\sqrt{12-2x}}$ und wir wissen, dass der Nenner positiv bleibt und immer kleiner wird. Somit bleibt auch der Bruch positiv und sein Wert wird immer größer. Aus $\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = \infty$ folgt nun $\lim_{x\nearrow 6}\frac{1}{\sqrt{12-2x}} = \infty$.

4. SCHRITT: EIGENSCHAFT VON G_f

Der Grenzwert von f' für $x \to 6$ ist unendlich. Das bedeutet, dass G_f am rechten Rand der Definitionsmenge nahezu senkrecht verläuft. Der Graph schmiegt sich dort der senkrechten Asymptote $x = 6$ an.

c)

1. SCHRITT: MONOTONIEVERHALTEN UNTERSUCHEN

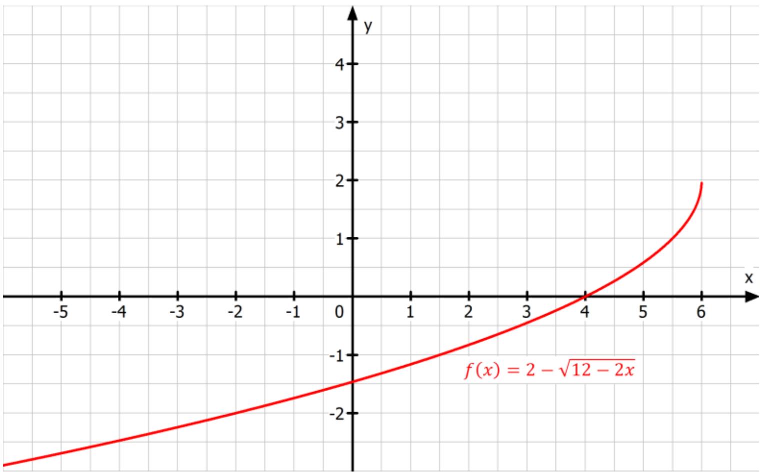
Eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall ist monoton steigend, wenn ihre Ableitung nie negativ wird; sie steigt streng monoton falls ihre Ableitung immer positiv ist. Hier ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{12-2x}}$, wobei der Nenner im Intervall $]-\infty; 6[$ positiv ist. Somit ist f' in diesem Bereich ebenfalls positiv, also steigt f hier streng monoton an.

2. SCHRITT: WERTEMENGE BESTIMMEN

Wir wissen bereits aus Teilaufgabe a), dass $f(6) = 2$ ist und aus der Monotonie geht hervor, dass alle übrigen Werte im Bereich $]-\infty; 6[$ kleiner sind. Aus Teilaufgabe a) wissen wir ferner, dass f nach unten unbeschränkt ist. Aus der Stetigkeit folgt nun, dass f alle Werte im Intervall $]-\infty; 2[$ annimmt, d.h. $W_f =]-\infty; 2[$.

d)

$f(-2) = -2$



e)

1. SCHRITT: DEFINITIONSMENGE DER UMKEHRFUNKTION ANGEBEN

Beim Übergang von einer Funktion zu ihren Umkehrfunktionen werden Definitions- und Wertemenge vertauscht.

Die Wertemenge von f ist nach Teilaufgabe c) $W_f =]-\infty; 2[$ und dies ist genau der Definitionsbereich von f^{-1}.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER UMKEHRFUNKTION

$$y = 2 - \sqrt{12-2x} \qquad | + \sqrt{12-2x}$$

$$y + \sqrt{12-2x} = 2 \qquad | -y$$

$$\sqrt{12-2x} = 2 - y \qquad | \text{ quadrieren}$$

$$12 - 2x = (2-y)^2 \qquad | -12$$

$$-2x = y^2 - 4y - 8 \qquad | :(-2)$$

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 2y + 4 \qquad | \text{ Variablen vertauschen}$$

Ergebnis:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4, \text{ d.h. } f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4.$$

Aufgabe 2

a)

Wir setzen den Funktionsterm von h in die Gleichung für w ein:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = x \qquad | -x$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0 \qquad | \cdot(-2)$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \qquad \text{Faktorisierung (mit Mitternachtsformel oder Satz von Vieta)}$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

Hieraus lesen wir die zwei Lösungen ab, nämlich $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$.

Die y-Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte stimmen wegen der Geradengleichung $y = x$ mit den eben bestimmten x-Koordinaten überein. Die Schnittpunkte sind also $S_1(-2;-2)$ und $S_2(4;4)$.

b)

1. SCHRITT: SCHEITELPUNKT BERECHNEN

Der x-Wert des Scheitelpunktes ist Nullstelle der 1. Ableitung:

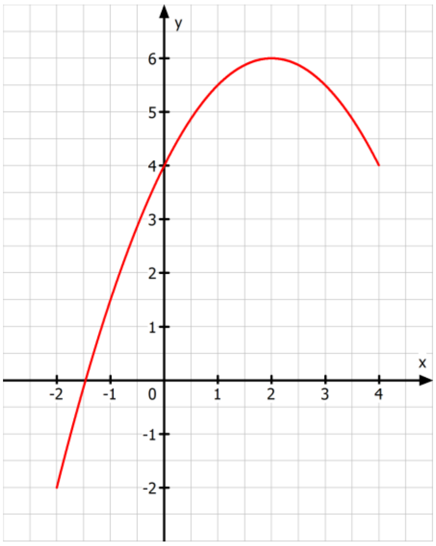
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = -x + 2$$

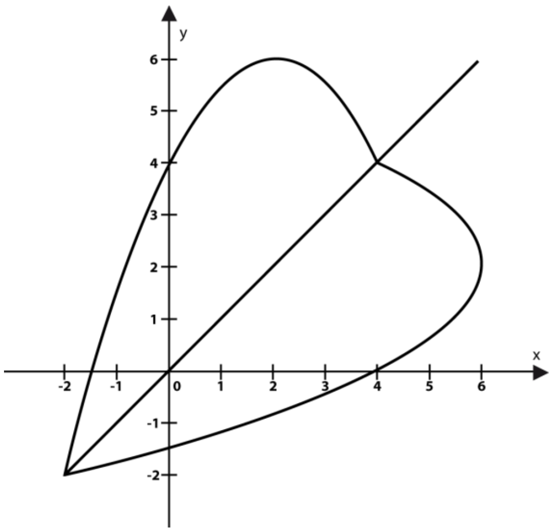
$$-x + 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 2$$

In f eingesetzt ergibt dies $y = 6$. Der Scheitelpunkt ist also $(2|6)$.

2. SCHRITT: PARABEL EINZEICHNEN



3. SCHRITT: SPIEGELN



Aufgabe 3

a)

1. SCHRITT: INTEGRATIONSGRENZEN BESTIMMEN

Die Integrationsgrenzen sind die Schnittpunkte der Funktion h mit der Winkelhalbierenden w.

Diese sind schon in Aufgabe 2a) berechnet worden. Integriert wird also von -2 bis 4.

2. SCHRITT: AUFSTELLEN DER INTEGRANDENFUNKTION

Wir ziehen die Funktionsterme zuerst voneinander ab und integrieren dann. Setze also

$f(x) = h(x) - w(x)$ mit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ und $w(x) = x$.

Dann ist $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Diese Funktion wird im

Integrationsbereich nie negativ (da h immer oberhalb von w verläuft). Somit ist die Flächenbilanz (also das Integral) gleich der gesuchten Fläche.

3. SCHRITT: EINE STAMMFUNKTION BENUTZEN

$$A = \int_{-2}^{4} (-\frac{1}{2}x^2 + x + 4)dx$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\Big|_{-2}^{4}$$

4. SCHRITT: RECHNUNG

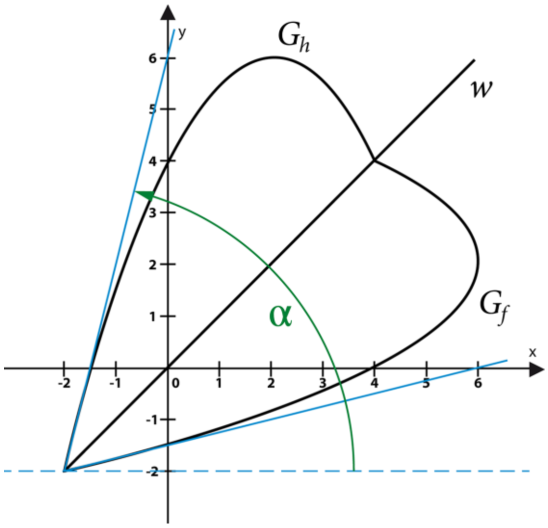
$$\mathrm{A} = \left(-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot(-2)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)\right)$$

$= 18$ FE

Dies ist nun die Fläche zwischen G_h und w, was aufgrund der Symmetrie des Modells genau die Hälfte der Blattfläche ausmacht. Unter Berücksichtigung des vorgegebenen Maßstabs erhalten wir eine Blattfläche von 36 cm².

b)

1. SCHRITT: SKIZZE



2. SCHRITT: BESTIMMUNG DER TANGENTE

Die Tangente hat die Form $y = mx + t$. Zunächst m bestimmen:
$m = h'(-2)$, wobei

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$. Somit ist

$h'(x) = -x + 2$ und speziell

$h'(-2) = 4$. Nun lautet unsere Geradengleichung $y = 4x + t$

Um t zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten eines Punktes auf der Geraden in die Gleichung ein. Die Tangente soll durch den Punkt $(-2|-2)$ gehen, also setzen wir $x = -2$ und $y = -2$ ein:

$-2 = 4 \cdot (-2) + t \Leftrightarrow t = 6$

Also lautet die Tangentengleichung: $y = 4x + 6$.

3. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN GERADE UND x-ACHSE

Offensichtlich ist der gesuchte Blattöffnungswinkel doppelt so groß wie der Winkel zwischen der Tangente und der Winkelhalbierenden w. Diesen wiederum erhalten wir durch Subtraktion der beiden Neigungswinkel zur x-Achse, die wir als Nächstes bestimmen.

Bezeichne mit α den Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Für den Winkel α gilt: $\tan \alpha = 4$, denn die Steigung der Tangente beträgt 4 (s.o.). Somit ist $\alpha = \tan^{-1}(4) \approx 75{,}96\,°$ (wir sehen anhand der Skizze, dass $0 < \alpha < 90\,°$ ist, also wählt der Taschenrechner den richtigen Zweig des Arcustangens).

Die Winkelhalbierende bildet mit der x-Achse einen Winkel von 45°.

4. SCHRITT: SUBTRAKTION DER BEIDEN WINKEL

Der Winkel zwischen der Tangente und der Winkelhalbierenden ist die Differenz der oben bestimmten Winkel, also $\alpha - 45° \approx 30{,}96\,°$.

Diesen Winkel verdoppeln wir, um den gesuchten Winkel zwischen der Tangente und ihrer Spiegelung an der Winkelhalbierenden zu bekommen. Der Wert des Winkels beträgt 61,92 °.

c)

Die obere Blattkante wird nun im Intervall durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} h(x) \text{ für } x > 0 \\ k(x) \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$$

beschrieben. Die Bedingungen I und II stellen sicher, dass f im Punkt $(0|4)$ stetig und differenzierbar ist, so dass dort G_h ohne Sprung und ohne Knick in G_k übergeht. Bedingung III bewirkt, dass die obere und untere Blattkante sich in der Blattspitze bei $(-2|-2)$ treffen.

Zur Bedingung IV: $k'(-2) = 1{,}5 < 4 = h'(-2)$ bedeutet, dass k in der Nähe der Blattspitze langsamer ansteigt (also flacher verläuft) als h. Damit wird bewerkstelligt, dass der Öffnungswinkel an der Blattspitze kleiner wird und diese etwas gebogen erscheint.