Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

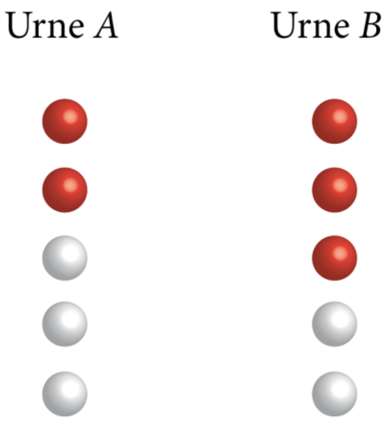
Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Stochastik

Bayern 2014

Aufgabe 1

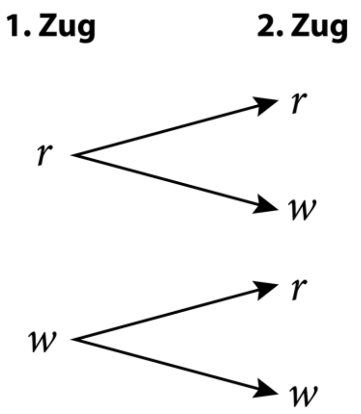
a)

1. SCHRITT: VISUALISIEREN



2. SCHRITT: MÖGLICHKEITEN FESTLEGEN

Das Experiment besteht aus zwei Zügen mit jeweils zwei Möglichkeiten, das heißt, es gibt insgesamt vier Möglichkeiten:



3. SCHRITT: ZUSAMMENSETZUNGEN BESTIMMEN

In den Fällen rr bzw. ww ändert sich die Zusammensetzung in Urne A nicht, es bleibt bei 2 roten und 3 weißen Kugeln in Urne A.

rw bedeutet, Urne A gibt eine rote Kugel ab und bekommt dafür eine weiße. Damit hat jetzt Urne A eine rote und 4 weiße Kugeln.

wr: Urne A gibt eine weiße Kugel ab und bekommt dafür eine rote.

Damit hat jetzt Urne A 3 rote und 2 weiße Kugeln.

Insgesamt gibt es also drei Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach dem 2. Zug, die wir schematisch wie folgt darstellen können:

(rwwww), (rrwww), oder (rrrww).

b)

1. SCHRITT: PFADREGELN

Drei weiße Kugeln in Urne A gibt es nur, wenn rr bzw. ww gezogen wird.

Der Fall „1. Kugel rot ***und*** 2. Kugel rot ***oder*** 1. Kugel weiß ***und*** 2. Kugel weiß“ hat nach den Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit

$P(E) = P(r_1) \cdot P(r_2|r_1) + P(w_1) \cdot P(w_2|w_1)$, wobei die Indices anzeigen, um welche Ziehung es sich handelt.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER EINZELWAHRSCHEINLICHKEITEN

$P(r_1)$ ist $\frac{2}{5}$, da bei der 1. Ziehung 2 der fünf Kugeln rot sind.

$P(r_2|r_1)$: Wenn im ersten Zug eine rote Kugel gewählt wird, befinden sich in Urne B vier rote und zwei weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote aus Urne B zu ziehen, ist also $\frac{2}{3}$.

$P(w_1)$ ist $\frac{3}{5}$, da bei der 1. Ziehung 3 der fünf Kugeln weiß sind.

$P(w_2|w_1)$: Eine weiße Kugel im ersten Zug bedeutet für Urne B drei rote und drei weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit für weiß im zweiten Zug ist dann $\frac{1}{2}$.

3. SCHRITT: BERECHNUNG DER WAHRSCHEINLICHKEIT DES EREIGNISSES E

$$P(E) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{15} + \frac{3}{10} = \frac{17}{30} > \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

Das Ereignis $\boldsymbol{E}$ hat tatsächlich eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis, da seine Wahrscheinlichkeit größer ist als $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 2

1. SCHRITT: BEDEUTUNG DES TERMS BESTIMMEN

Der Term $0{,}9^{20} + 20 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{19}$ bedeutet, dass ein Ereignis, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 eintritt, bei zwanzigmaliger Wiederholung des Experiments höchstens einmal eintritt. (oder äquivalent dazu: Ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0,9 tritt bei zwanzigmaliger Wiederholung des Experiments mindestens 19 Mal auf.)

2. SCHRITT: EREIGNIS BESCHREIBEN

Beispiel: Ein Torwart hält im Schnitt jeden 10. Elfmeter. Es wird zwanzigmal geschossen. Das Ereignis, dass er höchstens einen Elfmeter hält, genügt den gewünschten Anforderungen.

Aufgabe 3

1. SCHRITT: BERECHNUNG DES ERWARTUNGSWERTES

Der Erwartungswert wird mit der Formel $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i P(X = x_i)$ berechnet, wobei die x_i die Werte sind, die von X angenommen werden können:

$$E(X) = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot p_2 = \frac{7}{10} + 3p_2.$$

2. SCHRITT: ÜBERLEGUNG, WIE GROß P_2 MAXIMAL SEIN KANN

Der Erwartungswert ist nur abhängig von der Wahrscheinlichkeit p_2. Also überlegen wir uns, wie groß p_2 maximal sein kann.

Es gilt: $p_1 + 0{,}3 + 0{,}2 + p_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1 + p_2 = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad p_2 \leq 0{,}5.$

Folglich ist $E(X) \leq 0{,}7 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}2.$