Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Geometrie

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: QUADEREIGENSCHAFTEN

Drei Vektoren spannen dann einen Quader auf, wenn sie paarweise aufeinander senkrecht stehen.

2. SCHRITT: NACHWEIS

Zwei Vektoren bilden einen rechten Winkel, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\begin{aligned}\vec{a}\circ\vec{b} &= \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\circ\vec{c_t} &= \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}\\ &= 2\cdot 4t+1\cdot 2t+2\cdot(-5t)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}\circ\vec{c_t} &= \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}\\ &= (-1)\cdot 4t+2\cdot 2t+0\cdot(-5t)\\ &= 0\end{aligned}$$

Somit stehen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_t}$ stets aufeinander senkrecht, unabhängig vom Parameter t, d.h. der von diesen Vektoren aufgespannte Körper ist immer ein Quader.

b)

$V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|.$

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| &= \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}\right| \\ &= |(-4) \cdot 4t + (-2) \cdot 2t + 5 \cdot (-5t)| \\ &= |-45t| = 45|t| \overset{!}{=} 15 \end{aligned}$$

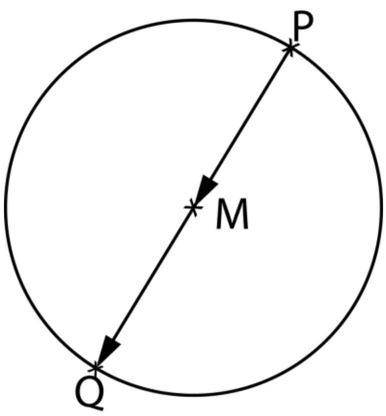
Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$|t| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{3}.$

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: SKIZZE



Man erreicht den Punkt Q, wenn man zu $\overrightarrow{OM}$ den Vektor $\overrightarrow{PM}$ addiert.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER KOORDINATEN

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PM}$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q hat also die Koordinaten $(-9|0|10)$.

b)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Eine Kugel berührt eine Ebene genau dann in nur einem Punkt, wenn der Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Ebene dem Radius der Kugel entspricht.

2. SCHRITT: RADIUS DER KUGEL

Der Radius der Kugel entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{MP}$.

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$, dies ist also der Radius.

3. SCHRITT: ABSTAND MITTELPUNKT-EBENE

Der Abstand des Mittelpunktes von der x_1-x_2-Ebene ist der Wert der x_3-Koordinate des Mittelpunktes. Dieser Wert ist 7, also gleich dem oben bestimmten Radius. Das heißt, die Kugel berührt die x_1-x_2-Ebene in genau einem Punkt.