Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Geometrie

Bayern 2014

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: KOORDINATEN VON F BESTIMMEN

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: VEKTOR $\overrightarrow{BF}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: LÄNGE DES VEKTORS BERECHNEN

$$\left|\overrightarrow{BF}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 4^2} = 12 \text{ LE.}$$

b)

1. SCHRITT: ORTHOGONALITÄT VON VEKTOREN

Zwei Vektoren sind rechtwinklig, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER VEKTOREN $\overrightarrow{MP}$ UND $\overrightarrow{MK}$

Hierzu müssen wir zunächst die Koordinaten der Punkte P und M bestimmen.

P ist der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$. Also ist

$$x_P = \frac{x_B + x_C}{2} = 4, y_P = \frac{y_B + y_C}{2} = 4 \text{ und}$$
$$z_P = \frac{z_B + z_C}{2} = 0.$$

M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AD]$. M hat also die Koordinaten $M(0|0|2)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{MK}$:

$$\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. SCHRITT: DAS SKALARPRODUKT

Für Orthogonalität muss gelten: $\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 0 + 4 \cdot y_K + (-2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow y_K = 1.$$

Aufgabe 2

a)

Die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse.

Generell gilt: Kommt in der Koordinatengleichung einer Ebene eine Koordinate nicht vor, dann ist die Ebene parallel zu der Achse, deren Koordinate nicht vorkommt.

Nach dieser Regel ist die Ebene E parallel zur x_1-Achse.

b)

1. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR SCHNITTPUNKT EBENE-KUGEL

Eine Ebene schneidet eine Kugel nur dann, wenn der Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Ebene höchstens so groß ist wie der Radius der Kugel. Ist der Abstand genau gleich dem Radius, dann berührt die Kugel die Ebene in genau einem Punkt.

2. SCHRITT: ABSTANDSBERECHNUNG

Abstand Punkt–Ebene über die Hesse-Normalform:

$$E: \frac{1}{5}(3x_2 + 4x_3 - 5) = 0$$

Wenn man die Koordinaten des Mittelpunktes in die HNF einsetzt, erhält man bis auf Vorzeichen den Abstand des Mittelpunktes von der Ebene:

$$d = \left| \frac{1}{5}(3 \cdot 6 + 4 \cdot 3) \right| = 6.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von E ist 6, der Radius der Kugel ist $7 > 6$. Also schneidet die Ebene die Kugel.