Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

# Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Analysis

## Bayern 2014

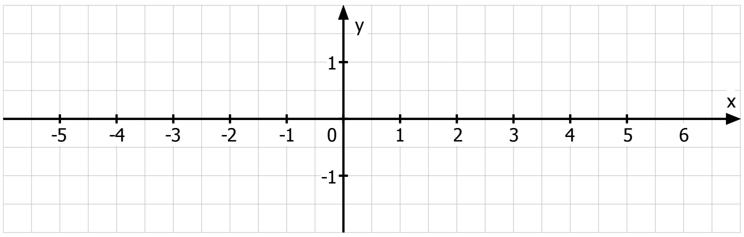
## Aufgabe 1

*a)*

Um eine Funktion $f$ an der $y$-Achse zu spiegeln muss man im Funktionsterm jedes $x$ durch $-x$ ersetzen. Im vorliegenden Fall wird aus der ursprünglichen Funktion $f(x) = \sin(x)$ die Funktion $g(x) = \sin(-x)$.

*b)*

1. SCHRITT: SKIZZE




2. SCHRITT: PASSENDEN FUNKTIONSTERM SUCHEN

Die Sinusfunktion hat den Wertebereich $[-1; 1]$.

Für den geforderten Wertebereich $[1; 3]$ muss man die Sinusfunktion um zwei Einheiten nach oben verschieben.

Die Verschiebungsformel liefert den Funktionsterm $h(x) = \sin(x) + 2$.

*c)*

In dem Term $\sin(bx)$ bestimmt der Parameter $b$ die Periodenlänge. Die Periodenlänge beträgt $\frac{2\pi}{b}$.

Wenn die Periode $\pi$ sein soll, muss $b = 2$ sein.

Eine Lösung lautet also $k(x) = \sin(2x)$.

## Aufgabe 2

*a)*

1. SCHRITT: FUNKTIONSTERM NULL SETZEN

$f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$, also

$f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (2x + x^2) = 0$

2. SCHRITT: EINZELNE FAKTOREN NULL SETZEN

$e^x \cdot (2x + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 0$ oder $2x + x^2 = 0$

Die Gleichung $e^x = 0$ hat keine Lösung.

$2x + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2$.

3. SCHRITT: NULLSTELLEN ANGEBEN

Die Funktion $f$ hat also zwei Nullstellen, $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

*b)*

$F$ ist eine Stammfunktion von $f$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$.

Wir bestimmen die Ableitung von $F(x)$ mit der Produktregel:

$F'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2(e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = f(x)$.

Jede Funktion der Form $x^2 \cdot e^x + C$ ist eine Stammfunktion von $f$.

Um $C$ zu bestimmen, setzen wir für $x$ 1 ein. Das Ergebnis muss $2e$ sein:

$e + C = 2e$, also $C = e$. Setze daher

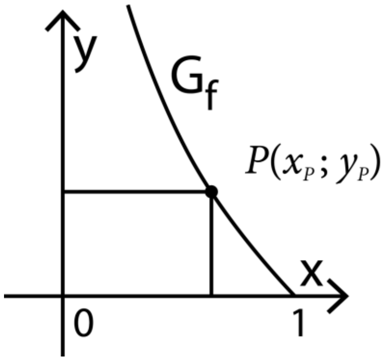
$G(x) = x^2 \cdot e^x + e$.

## Aufgabe 3

Wendepunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion sind Nullstellen der zweiten Ableitung mit Vorzeichenwechsel. Da $g$ zwei Wendepunkte im Intervall $[-5; 5]$ hat, muss $g''$ in diesem Bereich zwei Nullstellen haben, also kommen nur die Graphen I und III in Frage. Bei Graph III treten keine Vorzeichenwechsel auf, also ist Graph I der gesuchte.

## Aufgabe 4

1. SCHRITT: ZIELFUNKTION AUFSTELLEN




Wir suchen eine Formel für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von $x$. Die Formel für den Flächeninhalt von Rechtecken lautet im Allgemeinen $A = a \cdot b$, wenn $a$ und $b$ die Seitenlängen sind.

Wir bezeichnen den Eckpunkt des Rechteckes, der auf dem Funktionsgraphen liegt, mit $P$. Dann ist die Länge des Rechteckes offensichtlich $x_P$ und die Höhe $y_P$ und damit ist $A = x_P \cdot y_P$.

2. SCHRITT: UNBEKANNTE ELIMINIEREN

Wir ersetzen $y_P$ durch $-\ln(x)$. Damit haben wir eine Formel für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von $x$.

$A(x) = x \cdot (-\ln(x)) = -x \cdot \ln(x)$.

3. SCHRITT: EXTREMWERT BERECHNEN

Gesucht ist der Hochpunkt der Funktion, das heißt, es muss gelten:

$A'(x) \overset{!}{=} 0$ und $A''(x) < 0$.

Wir berechnen die 1. Ableitung mit der Produktregel.

$$\begin{aligned} A'(x) &= (-x)' \cdot \ln(x) + (-x) \cdot (\ln(x))' \\ &= -\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\ln(x) - 1, \text{wobei} \end{aligned}$$

Null setzen liefert:

$$-\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

4. SCHRITT: ART DES EXTREMWERTES BESTIMMEN

$$A''(x) = -\frac{1}{x}$$

$A''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt.

Das Rechteck mit der größten Fläche hat die Seitenlängen $\frac{1}{e}$ und $-\ln\frac{1}{e} = 1$.

## Aufgabe 5

*a)*

**1. SCHRITT: NULLSTELLE VON $f$ INTERPRETIEREN**

Die gesuchte Stammfunktion von $f$ bezeichnen wir mit $F$.

Die Steigung des Graphen von $F$ ist durch den Graphen von $f$ gegeben. Im Intervall $[a; b]$ hat $f$ eine Nullstelle $x_0$ mit Vorzeichenwechsel: links von $x_0$ ist $f$ positiv und rechts von $x_0$ ist $f$ negativ. Das bedeutet: links von $x_0$ steigt der Graph von $F$ streng monoton, rechts von $x_0$ fällt der Graph von $F$ streng monoton.

An der Stelle $x_0$ hat daher der Graph von $F$ einen Hochpunkt $H$.

**2. SCHRITT: TIEFPUNKT VON $f$ INTERPRETIEREN**

Wegen $F'(x) = f(x)$ ist $F''(x) = f'(x)$.

$f$ hat einen Tiefpunkt, dessen $x$-Koordinate wir mit $x_1$ bezeichnen. Damit hat hier $f'$ und damit auch $F''$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Also hat der Graph von $F$ an der Stelle $x_1$ einen Wendepunkt $W$.

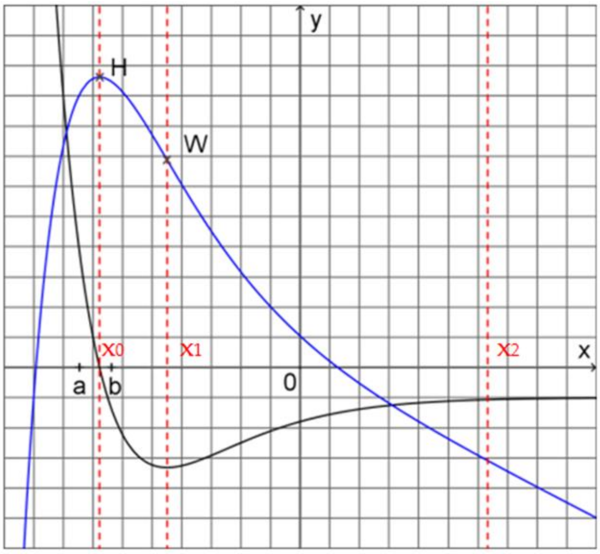
Der Wendepunkt $W$ liegt tiefer als der Hochpunkt $H$, da der Graph von $F$ in diesem Bereich streng monoton fällt.

**3. SCHRITT: BEREICH MIT $F(x)$ (FAST) KONSTANT INTERPRETIEREN**

Rechts von der Stelle $x_2$ (siehe Skizze unten) ist $f(x)$ und damit die Steigung des Graphen von $F$ (soweit man sehen kann) konstant. In diesem Bereich sieht also der Graph von $F$ aus wie eine Gerade.

*b)*

Die Daten aus Teilaufgabe a) liefern folgendes Bild (Stammfunktion blau):


y
H
W
X0
X1
X2
x
a
b
0