Bundesabitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Analysis

Bayern 2014

Aufgabe 1

1. SCHRITT: LAGE DES EXTREMPUNKTS E

Laut Quotientenregel ist

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Null setzen liefert:

$$f'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e \Rightarrow E(e|e)$$

2. SCHRITT: ART DES EXTREMPUNKTS E

	$1 < x < e$	$x = e$	$x > e$
$f'(x)$	negativ	0	positiv
Graph G_f	fällt	$E(e\mid e)$	steigt
		Tiefpunkt	

$\Rightarrow E(e|e)$ ist ein Tiefpunkt.

Aufgabe 2

a)

Null setzen liefert:

$f(x) = e^x \cdot (2x + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 0$ oder $2x + x^2 = 0$

Ausklammern liefert:

$\Leftrightarrow x(2 + x) = 0$ (da $e^x \neq 0$)

$\Longrightarrow$ Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

b)

Wir müssen zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ ist.

$F(x) = x^2 \cdot e^x$

Laut Produktregel ist

$$\begin{aligned}\Longrightarrow F'(x) &= (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' \\ &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= e^x(2x + x^2) = f(x).\end{aligned}$$

Wir bestimmen $G(x)$:

Die zwei Stammfunktionen F und G von f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante C, setze also als Erstes

$G(x) = F(x) + C$ und bestimme dann C mittels der Bedingung

$G(1) = 2e$.

Einsetzen liefert $G(1) = F(1) + C = 2e$

$\Longrightarrow C = 2e - F(1) = 2e - e = e$

$\Longrightarrow G(x) = F(x) + e$, also

$G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

Aufgabe 3

a)

α) Wähle eine um 1 nach oben verschobene Sinuskurve $g_{a,c} = \sin(x) + 1$
$\Longrightarrow a = 1,\ c = 1$.

β) Die Periodenlänge der Funktion $g_{a,0} = \sin(ax)$ ist zugleich der Abstand zwischen der ersten und dritten nichtnegativen Nullstelle.
Die Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{a}$, setze also $\frac{2\pi}{a} = \pi \Longrightarrow a = 2$.
Somit ist $g_{a,c} = \sin(2x)$ mit $a = 2$ und $c = 0$ eine Lösung.

b)

Laut Kettenregel ist

$$\begin{aligned}\left(g_{a,c}(x)\right)' &= (\sin(ax) + c)' \\ &= \cos(ax) \cdot (ax)' + 0 \\ &= \cos(ax) \cdot a \\ &= a \cdot \cos(ax)\end{aligned}$$

Da $\cos(ax)$ das Intervall $[-1; 1]$ als Wertemenge hat, nimmt die Ableitung von $g_{a,c}$ genau die Werte aus dem Intervall $[-a; a]$ an.

Aufgabe 4

a)

Die gesuchte Stammfunktion von f bezeichnen wir mit F.

Die Steigung des Graphen von F ist durch den Graphen von f gegeben. Im Intervall $[a; b]$ hat f eine Nullstelle x_0 mit Vorzeichenwechsel.

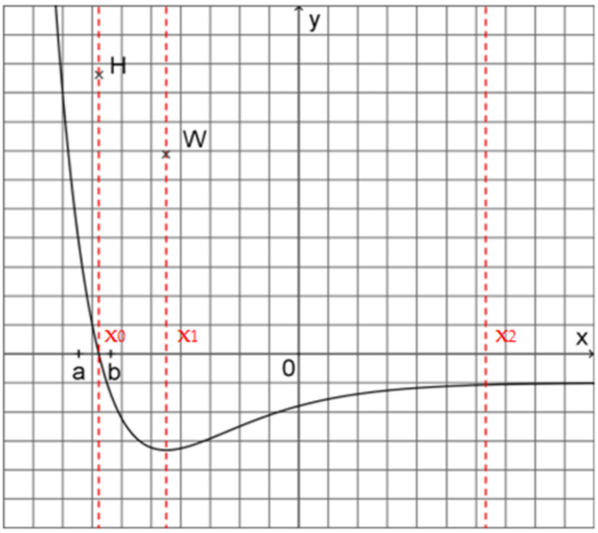
Links von der Nullstelle x_0 steigt der Graph von F streng monoton, da dort f positiv ist. Rechts von der Nullstelle x_0 fällt der Graph von F streng monoton, da dort f negativ ist.

An der Stelle x_0 hat der Graph von F demnach einen Hochpunkt H.

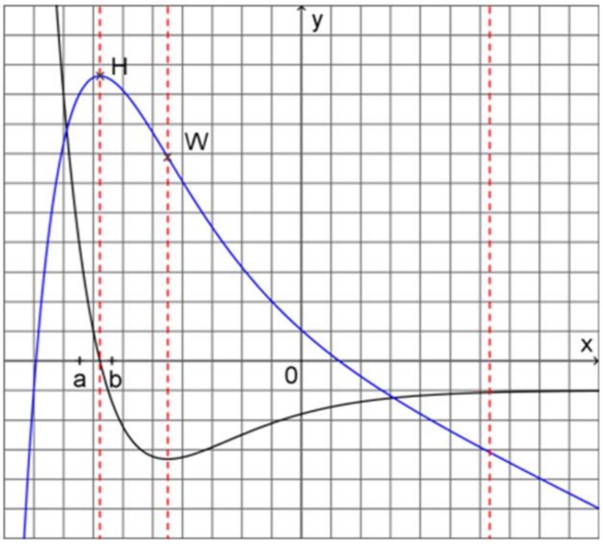
b)

An der Stelle x_1 hat der Graph von f einen Tiefpunkt. Damit hat hier f' und damit auch F'' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Also hat der Graph von F an der Stelle x_1 einen Wendepunkt W.

Rechts von der Stelle x_2 ist $f(x)$ und damit die Steigung des Graphen von F (soweit man sehen kann) konstant. In diesem Bereich sieht also der Graph von F aus wie eine Gerade. Hier eine Skizze dazu:



Aus den obigen Daten ergibt sich folgendes Bild von F:



Bemerkung:

Eine Stammfunktionen von f ist nur bis auf Verschiebung um eine Konstante eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, dass der blaue Graph beliebig nach oben oder unten verschoben werden kann und dabei immer noch eine korrekte Lösung darstellt.