Abitur Mathematik: Musterlösung

Pflichtteil

Baden-Württemberg 2014

Aufgabe 1

1. SCHRITT: STRUKTUR DER FUNKTION BESCHREIBEN

Der Funktionsterm von f ist das Produkt einer einfachen Funktion $u(x) = \sqrt{x}$ und einer Verkettung $v(x) = e^{2x} = g(h(x))$ mit $g(x) = e^x$ und $h(x) = 2x$.

2. SCHRITT: RECHENREGELN ANWENDEN

Da die Teilfunktionen u und v miteinander multipliziert werden, wird die Produktregel benötigt.

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Dabei kann $u'(x)$ mit der Potenzregel bestimmt werden, denn $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Potenzregel: $u(x) = x^n \Longrightarrow u'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit $n = \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Die Funktion v ist eine Verkettung, so dass die Kettenregel gebraucht wird.

Kettenregel: $v(x) = g\big(h(x)\big) \Longrightarrow v'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$ mit $g(x) = e^x$ und $h(x) = 2x \Longrightarrow v'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$.

Einsetzen von $u'(x)$ und $v'(x)$ in die grüne Formel liefert

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x} \\
&= e^{2x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

1. SCHRITT: VERSCHACHTELUNGSTYP ERKENNEN

Der Integrand $\frac{4}{(2x+1)^3} = 4 \cdot (2x+1)^{-3}$ ist bis auf den konstanten Faktor 4 eine Verkettung aus der Potenzfunktion $x \longmapsto x^{-3}$ und der linearen Funktion $x \longmapsto 2x + 1$.

2. SCHRITT: INTEGRATIONSREGELN ANWENDEN

Für Potenzfunktionen mit Exponenten ungleich -1 gilt die Integrationsregel $f(x) = x^n \Longrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Für $n = -3$ ergibt sich somit $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2}x^{-2}$ als Stammfunktion von $f(x) = x^{-3}$.
Die Regel der linearen Substitution besagt:
Ist H eine Stammfunktion von h, so ist eine Stammfunktion von $x \longmapsto h(ax+b)$ gegeben durch $x \longmapsto \frac{1}{a}H(ax+b)$.
Nach dieser Regel ist dann durch $x \longmapsto \frac{1}{2}F(2x+1) = -\frac{1}{4}(2x+1)^{-2}$ eine Stammfunktion von $x \longmapsto f(2x+1) = (2x+1)^{-3}$ gegebenen.
Um schließlich eine Stammfunktion des Integranden $4 \cdot (2x+1)^{-3}$ zu erhalten, muss die Faktorregel herangezogen werden: Sie lautet $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$. In unserem Fall ist $a = 4$ und wir erhalten $G(x) = -4 \cdot \frac{1}{4}(2x+1)^{-2} = -\frac{1}{(2x+1)^2}$ als Stammfunktion des Integranden $\frac{4}{(2x+1)^3}$.

3. SCHRITT: INTEGRATIONSGRENZEN EINSETZEN UND RECHNEN

Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{(2x+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}.$$

Aufgabe 3

1. SCHRITT: GLEICHUNGSTYP ERKENNEN

Es tauchen nur zweite und vierte Potenzen der Variablen auf, d. h. es handelt sich um eine biquadratische Gleichung.

2. SCHRITT: DURCH SUBSTITUTION QUADRATISCHE GLEICHUNG BILDEN

Durch die Substitution $u = x^2$ wird die biquadratische Gleichung

$$x^4 = 4 + 3x^2$$

zur quadratischen Gleichung

$$u^2 = 4 + 3u.$$

3. SCHRITT: QUADRATISCHE GLEICHUNG LÖSEN

$u^2 = 4 + 3u$ $\qquad | -3u - 4$

$u^2 - 3u - 4 = 0$ $\qquad$ Quadratische Lösungsformel

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Somit ergeben sich die zwei Lösungen $u = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$ und $u = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$.

4. SCHRITT: RÜCKSUBSTITUTION

Um die ursprüngliche biquadratische Gleichung zu lösen, wird die Substitution $u = x^2$ wieder rückgängig gemacht. Durch Einsetzen der beiden Lösungen für u (also $u = -1$ und $u = 4$) in diese Substitutionsgleichung ergeben sich die Lösungen für x:

$-1 = x^2$ hat keine reelle Lösung.

$4 = x^2$ hat die reellen Lösungen $x = -2$ und $x = 2$. Dies sind also alle reellen Lösungen der vorgegebenen biquadratischen Gleichung.

Aufgabe 4

a)

1. SCHRITT: TRANSFORMATION VON f NACH g ERKLÄREN

PERIODENSTRECKUNGSPARAMETER ERKLÄREN

Zunächst wird $f(x) = \cos(x)$ durch Stauchung in x-Richtung um den Faktor $\frac{\pi}{2}$ in die Funktion $f^*(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ überführt.

STRECKUNGSPARAMETER ERKLÄREN

Aus $f^*(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ wird durch Streckung in y-Richtung um den Faktor 2 die Funktion $f^{**}(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

VERSCHIEBUNG ERKLÄREN

Der Graph von f^{**} wird nun um 2 LE nach unten verschoben, um G_f zu erhalten.

b)

1. SCHRITT: GLEICHUNG VEREINFACHEN

Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0$ für $0 \leq x \leq 4$.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0 \qquad |+2$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2 \qquad |:2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

Die Substitution $u = \frac{\pi}{2}x$ liefert die einfachere Gleichung

$\cos(u) = 1.$

Die Maxima der Kosinusfunktion befinden sich an den Stellen $x_k = 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die Rücksubstitution liefert $u = \frac{\pi}{2}x = 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Die einzigen ganzzahligen Vielfache von 4, die im vorgegebenen Intervall $[0; 4]$ liegen, sind die Ränder. Die gesuchten Lösungen der Gleichung (und damit die Nullstellen von g) sind somit

$x = 0$ und $x = 4$.

Aufgabe 5

a)

1. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DER VERKETTUNG AN DER STELLE x=3 BESTIMMEN

Der Funktionswert von g an der Stelle $x = 3$ ist die Höhe des Schnittpunkts von K_g mit der senkrechten Geraden $x = 3$, also laut Abbildung etwa -1. Dieser Wert wird in f eingesetzt. Der Funktionswert von f an der Stelle $x = -1$ ist die Höhe des Schnittpunkts von K_f mit der senkrechten Geraden $x = -1$, also laut Abbildung etwa 5. Es gilt also (innerhalb der Genauigkeit der Abbildung)

$f\big(g(3)\big) = f(-1) = 5.$

2. SCHRITT: EINE NULLSTELLE DER VERKETTUNG BESTIMMEN

Eine Nullstelle von f ist der x-Wert eines Schnittpunkts von G_f mit der x-Achse. Ein solcher ist laut Abbildung etwa $(0|0)$, also bei $x = 0$. Die Verkettung $f \circ g$ nimmt also den Wert null an, wenn g den Wert null annimmt. Die Nullstelle von g liegt laut Abbildung etwa bei $x = 2$. Somit ist $f\big(g(2)\big) = f(0) = 0$, d. h. $x = 2$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Bemerkung:

Eine weitere Nullstelle von f ist etwa bei $x = 4$ und g nimmt etwa bei $x = -2$ den Wert 4 an. Also ist $x = -2$ eine weitere Lösung der Gleichung $f\big(g(x)\big) = 0$.

b)

1. SCHRITT: PRODUKTREGEL ANWENDEN

Laut Produktregel ist $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, also speziell

$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2).$

2. SCHRITT: WERTE ABLESEN UND EINSETZEN

$f'(2)$ ist die Steigung von K_f an der Stelle $x = 2$, also etwa 0, denn K_f hat eine Tiefpunkt etwa bei $(2|-4)$. $g(2)$ ist der Funktionswert von g an der Stelle $x = 2$, also etwa 0. $f(2)$ ist etwa -4 und $g'(2)$ ist die Steigung der Geraden K_g. Die Gerade geht in etwa durch die Punkte $(0|2)$ und $(2|0)$ und hat somit ungefähr die Steigung $\frac{0-2}{2-0} = -1$. Einsetzen dieser Schätzwerte in die Formel

$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$

liefert $h'(2) = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) = 4$.

Aufgabe 6

a)

1. SCHRITT: SPURPUNKTE MIT ACHSENABSCHNITTSFORM BESTIMMEN

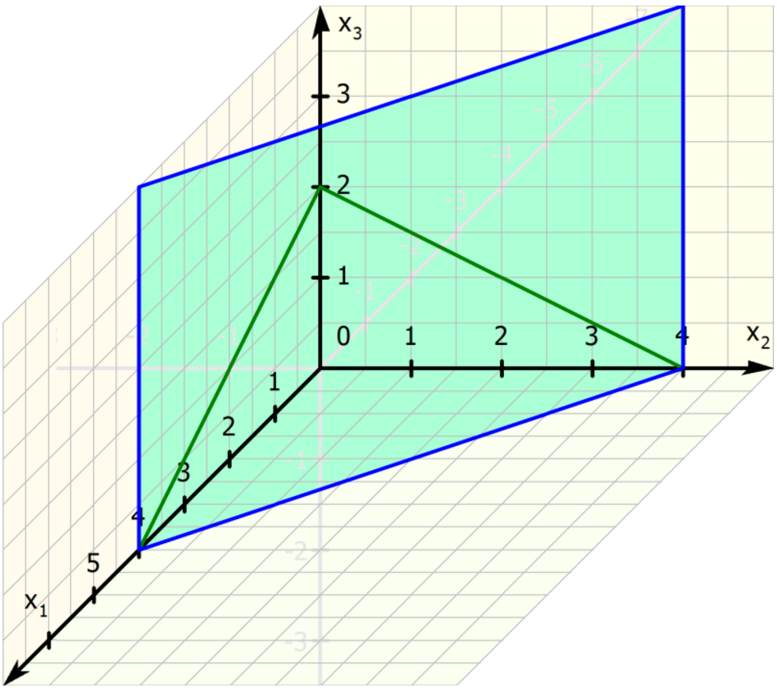
Ebenengleichungen in die Achsenabschnittsform:

$E\colon \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} = 1$ $S_{E_1}(4|0|0)$, $S_{E_2}(0|4|0)$, kein Punkt auf x_3-Achse

$F\colon \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1$ $S_{F_1}(4|0|0)$, $S_{F_2}(0|4|0)$, $S_{F_3}(0|0|2)$

2. SCHRITT: EBENEN IN EINEM KOORDINATENSYSTEM ZEICHNEN

Da E keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse hat, verläuft diese Ebene parallel zur x_3-Achse durch die beiden Spurpunkte S_{E_1} und S_{E_2}. F ist die ebene Fortsetzung des Spurdreiecks mit Eckpunkten S_{F_1}, S_{F_2} und S_{F_3}:



3. SCHRITT: SCHNITTGERADE ABLESEN UND ANGEBEN

Die gemeinsamen Spurpunkte $S_{E_1}(4|0|0)$ und $S_{E_2}(0|4|0)$ legen bereits die Schnittgerade von E und F fest: Eine Parametergleichung lautet

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OS_{E_1}} + r \cdot \left(\overrightarrow{OS_{E_2}} - \overrightarrow{OS_{E_1}}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

b)

1. SCHRITT: GLEICHUNG IN ACHSENABSCHNITTSFORM ANSETZEN

Die Ebene G enthält die Spurgerade g und ist damit nicht parallel zur x_2- oder x_3-Achse. Sie ist aber parallel zur x_1-Achse. Deswegen taucht die Koordinate x_1 in der Gleichung von G nicht auf, sehr wohl aber die Koordinaten x_2 und x_3. Die Achsenabschnittsform muss also

$$G: \frac{x_2}{a} + \frac{x_3}{b} = 1$$

für geeignete Konstanten a und b lauten.

2. SCHRITT: SPURPUNKTE EINSETZEN

Mit g enthält G auch die beiden Spurpunkte $S_{G_2}(0|4|0)$ und $S_{G_3}(0|0|2)$. Einsetzen von S_{G_2} in die Achsenabschnittsform für G liefert die zur Koordinate x_2 gehörige Konstante $a = 4$. Einsetzen von S_{G_3} liefert die zur Koordinate x_3 gehörige Konstante $b = 2$. Die vollständige Achsenabschnittsform von G lautet somit

$$G: \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1.$$

Bemerkung:

Eine Parametergleichung für G lautet

$$G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7

1. SCHRITT: LOTFUßPUNKT BESTIMMEN

GERADENGLEICHUNG AUFSTELLEN

Die Punkte A und B legen die Gerade g eindeutig fest, der Ortsvektor von A kann als Stützvektor dienen, der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist ein möglicher Richtungsvektor von g. Somit ergibt sich

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r \text{ reell.}$$

ORTHOGONALITÄTSBEDINGUNG AUFSTELLEN (SKALARPRODUKT ANWENDEN)

Der allgemeine Geradenpunkt P_r auf g hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_r} = \begin{pmatrix}1\\10\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-4r\\10+3r\\1\end{pmatrix}$. Der Abstand von g zu C ist der kürzeste Abstand eines solchen Punktes zu C. Der Abstand ist genau dann minimal, wenn der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_rC}$ auf der Geraden g senkrecht steht. Die Bedingung dafür ist, dass das Skalarprodukt aus dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_rC}$ und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ der Geraden g verschwindet, d. h.

$$\overrightarrow{P_rC} \circ \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} = 0.$$

Dabei ist

$$\overrightarrow{P_rC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP_r} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1-4r\\10+3r\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4r\\-7-3r\\0\end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_rC} \circ \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1+4r\\-7-3r\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\\ &= (1+4r)\cdot(-4) + (-7-3r)\cdot 3 + 0\cdot 0\\ &= -4-16r-21-9r\\ &= -25-25r.\end{aligned}$$

GLEICHUNG LÖSEN

Die Gleichung

$-25-25r = 0$ hat als Lösung $r = -1$. Einsetzen dieser Lösung in die Koordinaten von P_r liefert den Lotfußpunkt

$$L(1-4\cdot(-1)|10+r\cdot(-1)|1) = L(5|9|1).$$

2. SCHRITT: ABSTAND AUSRECHNEN

Für den Abstand von C zu g ergibt sich somit

$$d(C,g) = d(L,C) = \left|\overrightarrow{LC}\right|.$$

Durch Einsetzen des Parameters $r = -1$ in die obige Gleichung $\overrightarrow{P_rC} = \begin{pmatrix}1+4r\\-7-3r\\0\end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$. Also kann die Berechnung von $d(C,g)$ wie folgt fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned} d(C,g) &= \left|\overrightarrow{LC}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Der Abstand des Punktes C von der Geraden g beträgt somit 5 LE.

Aufgabe 8

a)

1. SCHRITT: TYP DES ZUFALLSEXPERIMENTS ERKENNEN

Der erste Summand hat die Form

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

mit $k = 8$, $n = 10$ und $p = \frac{2}{3}$.

Die anderen Summanden lassen sich auch auf diese Form bringen, denn

$$10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

und

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0.$$

$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ entspricht in der vorliegenden Situation der Wahrscheinlichkeit, ein Spiel zu verlieren. Die Länge n gibt an, wie oft gespielt wird und k gibt an, wie viele Spiele verloren gehen.

2. SCHRITT: EREIGNIS FORMULIEREN

Der vorgegebene Term ist nach obigen Umformungen

$$\binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0.$$

Nach der Pfadadditionsregel entspricht die Addition einer „oder“-Verknüpfung von Elementarereignissen, d. h. der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass entweder 8 oder 9 oder 10 Treffer bei einer Bernoullikette erreicht werden. Gemäß obiger Übertragung auf unsere Situation heißt das, dass von insgesamt 10 Spielen entweder 8, 9 oder 10 verloren gehen. Das vereinfacht sich zum Ereignis

A: „Von 10 Spielen gehen mindestens 8 Spiele verloren.“

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG ANGEBEN

Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der verloren gegangenen Spiele bei insgesamt 4 Spielen zählt, ist binomialverteilt mit Parametern $n = 4$ und $p = \frac{2}{3}$.

P(X=2) = B(4, $\frac{2}{3}$, 2)

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT MIT DER BERNOULLIFORMEL BERECHNEN

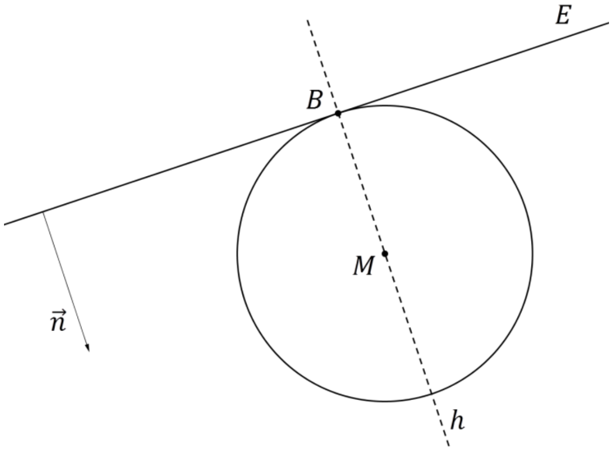
Die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal zu verlieren, ist

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= B\left(4; \frac{2}{3}; 2\right) \\ &= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{24}{81} \\ &= \frac{8}{27}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 9

1. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN

In der folgenden 2D-Skizze ist E die vorgegebene Ebene, $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, M der Mittelpunkt der Kugel, B der Berührpunkt der Kugel mit der Ebene und g die Gerade durch M und B:



2. SCHRITT: VORGEHENSWEISE BESCHREIBEN

Der Berührpunkt B der Kugel mit der Ebene ist der Schnittpunkt der Geraden g mit E.

Eine Parametergleichung der Geraden g sich wie folgt: Als Stützvektor dient der Ortsvektor des vorgegebenen Kugelmittelpunkts M. Als Richtungsvektor dient der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E (den man ggf. aus der Ebenengleichung von E bestimmen muss), denn g schneidet E im rechten Winkel.

Dann bestimmt man den Schnittpunkt von g und E, das ist der Berührpunkt B.

Der Radius der Kugel ist der Abstand von B zum Kugelmittelpunkt M, also $r = d(M, B) = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right|$.