Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Analysis A 2

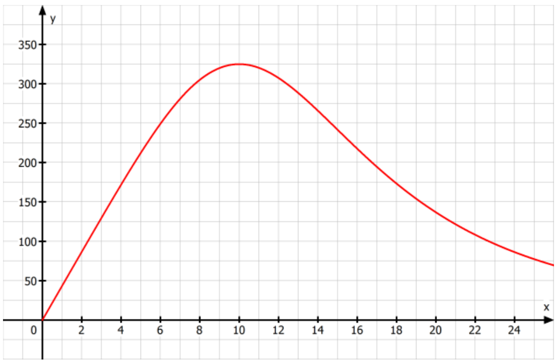
Baden-Württemberg 2014

Aufgabe A 2.1

a)

1. SCHRITT: GRAPH SKIZZIEREN

Eingabe von `(1300000×X)÷(X^4+30000)` im `GRAPH`-Modus liefert über den `DRAW`-Befehl folgende Skizze:



2. SCHRITT: MAXIMALE ANKUNFTSRATE BESTIMMEN

Mit dem `MAX`-Befehl aus dem `G-Solv`-Menü im `GRAPH`-Modus erhält man die Maximalstelle $t = 10$.

Die Ankunftsrate ist zehn Stunden nach Beobachtungsbeginn am größten.

3. SCHRITT: ANZAHL DER FAHRZEUGE BESTIMMEN

Die gesuchte Fahrzeuganzahl ist gegeben durch das Integral

$$\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t.$$

Im `G-Solv`-Menü kann mit dem `∫dx`-Befehl das Integral näherungsweise ausgewertet werden. Gibt man als Untergrenze 0 und als Obergrenze 6 ein, so wird (auf die nächste ganze Zahl gerundet) der Wert 769 angezeigt.

In den ersten 6 Stunden fahren laut Modell 769 Autos über die Grenze.

b)

1. SCHRITT: STAUBEGINN BERECHNEN

Die Fahrzeuge stauen sich, wenn die Anzahl der abgefertigten Fahrzeuge niedriger ist, als die Anzahl der ankommenden Fahrzeuge.

Gesucht ist also der Zeitpunkt, zu dem die Funktion f erstmals den Wert 110 übersteigt. Gibt man im `GRAPH`-Menü als zweite Funktion `Y2=110` ein, so liefert im `G-Solv`-Menü der Befehl `ISCT` den Wert $t = 2{,}54$ (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

Nach etwas mehr als $2\frac{1}{2}$ Stunden beginnen sich die Autos zu stauen.

2. SCHRITT: MAXIMALE STAULÄNGE BESTIMMEN

Die Zunahmerate s der Staulänge ist die Differenz aus Ankunftsrate und Abfertigungsrate, d. h. $s(t) = f(t) - 110$. Die Anzahl der vor dem Grenzübergang gestauten Autos nimmt ab etwa $t = 2{,}54$ zu, so lange bis $s(t)$ wieder 0 wird (also bei etwa $t = 21{,}86$ laut GTR). Die maximale Anzahl der vor dem Grenzübergang gestauten Autos ist also näherungsweise gegeben durch

$$\int_{2,54}^{21,86} s(t)\mathrm{d}t.$$

Definiert man `Y3=Y1-Y2`, so liefert der `∫dx`-Befehl für dieses Integral den Näherungswert 2324,97 (gerundet).

Es stauen sich also maximal etwa 2325 Autos vor dem Grenzübergang.

3. SCHRITT: NEUBERECHNUNG MIT ANDERER RATE

Die Zunahmerate s ist jetzt für $t \geq 12$ gegeben durch $s(t) = f(t) - 220$. Die zweite Nullstelle errechnet sich mit dem GTR zu etwa $t = 15{,}90$.

Bis zur Erhöhung der Abfertigungsrate stauen sich etwa

$$\int_{2,54}^{12} s(t)\mathrm{d}t = \int_{2,54}^{12} (f(t) - 110)\mathrm{d}t \approx 1422{,}6$$

Autos, danach kommen noch

$$\int_{12}^{15,9} s(t)\mathrm{d}t \approx 179{,}8$$

hinzu. Insgesamt stauen sich somit ca. $1422{,}6 + 179{,}8 = 1602{,}4 \approx 1602$ Autos vor der Grenze.

Aufgabe A 2.2

a)

1. SCHRITT: EXTREMPUNKT BESTIMMEN

Die Kosinusfunktion hat im angegebenen Intervall nur eine Extremstelle, nämlich bei $x = 0$. Weder die Streckung in y-Richtung um den Faktor a, noch die Verschiebung nach unten um a^2 LE ändert daran etwas.

Somit hat auch f_a in $(-\pi; \pi)$ als einzige Extremstelle $x = 0$, wo der Funktionswert $f_a(0) = a - a^2$ beträgt. Der Extrempunkt hat demnach die Koordinaten $(0|a - a^2)$.

b)

2. SCHRITT: ORTSKURVE DER EXTREMA BESTIMMEN

Die Punkte der Graphen G_a sind genau die in Teilaufgabe a) bestimmten Extrempunkte. Die Ortskurve ist also gegeben durch $x(a) = 0$ und $y(a) = a - a^2$.

3. SCHRITT: GESUCHTE PUNKTE BESTIMMEN

Die Menge der möglichen y-Werte für die Punkte der Graphen G_a auf der y-Achse ist also genau die Wertemenge der quadratischen Funktion $a \mapsto a - a^2$ mit Definitionsbereich $(0; \infty)$. Da der Koeffizient des quadratischen Terms negativ ist, handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, d. h. die Wertemenge ist nach oben beschränkt. Der Maximalwert wird am Scheitelpunkt erreicht, dessen a-Koordinate in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt.

Wegen $a - a^2 = a(1 - a)$ liegt die einzige Nullstelle bei $a = 1$, also hat der Scheitelpunkt die a-Koordinate $a = 0{,}5$. Die y-Koordinate an dieser Stelle ist $0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25$.

Somit liegen alle Punkte $(0|y)$ der y-Achse mit $y \leq 0{,}25$ auf einem der G_a, aber keiner der Punkte $(0|y)$ mit $y > 0{,}25$.