Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Analysis A 1

Baden-Württemberg 2014

erlaubte Hilfsmittel: graphischer Taschenrechner

Aufgabe A 1.1

a) Graph skizzieren, Koordinaten ablesen und Asymptote bestimmen

1. SCHRITT: FUNKTIONSTERM IN DEN GTR EINGEBEN

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `10×X×e^(-0.5×X)` und in der nächsten Zeile `d/dx(Y1)`.

2. SCHRITT: GESUCHTE PUNKTE UND ASYMPTOTE MIT DEM GTR BESTIMMEN

Der Menüpunkt `DRAW` liefert eine Skizze von f und f', an der man erkennt, dass der Extrempunkt von f ein Maximum ist und G_f von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht, d. h. der Wendepunkt ist ein Minimum der Ableitung. Ebenso sieht man, dass siech G_f für $x \longrightarrow \infty$ der x-Achse nähert, d. h. die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = 0$. Im `G-Solv`-Menü liefert der Menüpunkt `MAX` eine Näherung für den Hochpunkt von G_f, nämlich (auf eine Nachkommastelle gerundet) HP(2,0|7,4). Analog erhält man eine Näherung für das Minimum von f' (also den Wendepunkt von f): WP(4,0|5,4).

Bemerkung:

Der Hochpunkt hat die Koordinaten $\left(2\middle|\frac{20}{e}\right)$ und der Wendepunkt $\left(4\middle|\frac{40}{e^2}\right)$.

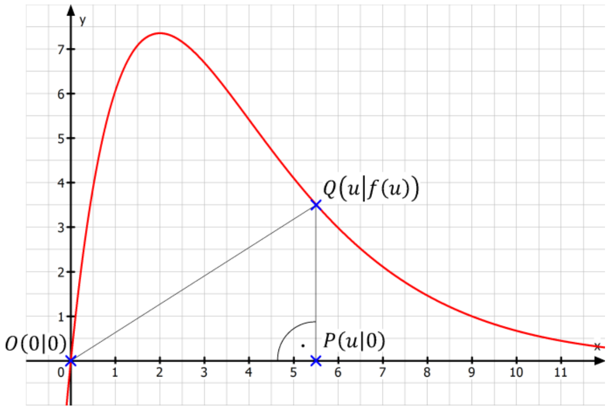
3. SCHRITT: GRAPHEN SKIZZIEREN

Übertragung der Graphik-Anzeige des GTR:

b)

1. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN

Ergänzung der Skizze aus Teilaufgabe a):



2. SCHRITT: FLÄCHENINHALT IN ABHÄNGIGKEIT VON u BESTIMMEN

Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten OP und PQ, wobei OP die Länge u und PQ die Länge $f(u)$ hat.

Der Flächeninhalt entspricht dem halben Produkt der beiden Kathetenlängen:

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0{,}5u} = 5u^2 e^{-0{,}5u}.$$

3. SCHRITT: PARAMETER BESTIMMEN

Gesucht ist ein $u \in \mathbb{R}$ mit $A(u) = 8$. Diese Gleichung wird im `EQUA`-Modus des GTR näherungsweise gelöst:

Nach Eingabe der Gleichung und Auswahl von `SOLV` wird (auf zwei Nachkommastelle gerundet) 2,18 ausgegeben.

Für $u \approx 2{,}18$ hat also das Dreieck OPQ den Flächeninhalt 8 FE.

Das Dreieck OPQ ist genau dann gleichschenklig, wenn die Katheten OP

und PQ gleich lang sind, also wenn $u = f(u)$ gilt.

Eine Näherungslösung dieser Gleichung erhält man durch Eingabe von `X=10×X×e^(-0.5×X)` im `EQUA`-Modus. Der `SOLV`-Befehl liefert (auf zwei Nachkommastelle gerundet) 4,61.

Für $u \approx 4{,}61$ ist das Dreieck OPQ gleichschenklig.

c)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

Der Mittelwert m der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ist

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Gesucht ist ein solches Intervall mit $b = a + 3$ und $m = 2{,}2$. Bezeichnen wir die Untergrenze a mit x, so ergibt sich die Gleichung

$$2{,}2 = \frac{1}{3}\int_x^{x+3} f(t)\mathrm{d}t,$$

die sich mit dem GTR näherungsweise lösen lässt, indem man im `GRAPH`-Modus neben der Funktion `Y1=10×X×e^(-0.5×X)` noch `Y2=fnInt(Y1,X,X,X+3)÷3-2.2` definiert und dann mit der `ROOT`-Funktion die Nullstelle von `Y2` bestimmen lässt. Die Ausgabe ist (auf eine Nachkommastelle gerundet) 5,5.

Somit ist $[5{,}5; 8{,}5]$ näherungsweise ein Intervall, auf dem der Mittelwert von f 2,2 beträgt.

Aufgabe A 1.2

1. SCHRITT: EXTREMPUNKTE IN ABHÄNGIGKEIT VON t BESTIMMEN

Die erste Ableitung von f_t nach x ist

$f_t'(x) = x^2 - t^2 = (x-t)(x+t)$.

Die Extremstellen von f_t sind Nullstellen von f_t', also $x = t$ und $x = -t$. Die Extrempunkte sind also $\left(t \middle| f_t(t)\right)$ und $\left(-t \middle| f_t(-t)\right)$, also $\left(t \middle| -\frac{2}{3}t^3\right)$ und $\left(-t \middle| \frac{2}{3}t^3\right)$.

2. SCHRITT: ABSTANDSGLEICHUNG AUFSTELLEN

Der Abstand der beiden Extrempunkte $E_1\left(t \middle| -\frac{2}{3}t^3\right)$ und $E_2\left(-t \middle| \frac{2}{3}t^3\right)$ ist die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{E_1E_2} = \begin{pmatrix} -t-t \\ \frac{2}{3}t^3 - \left(-\frac{2}{3}t^3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ \frac{4}{3}t^3 \end{pmatrix}$.

Diese Länge ist nach dem Satz von Pythagoras

$d = \sqrt{(2t)^2 + \left(-\frac{4}{3}t^3\right)^2}$. Die Bedingung, dass diese Länge 13 betragen soll, führt auf die Gleichung

$$13 = \sqrt{(2t)^2 + \left(-\frac{4}{3}t^3\right)^2}.$$

3. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

Eingabe von `13=√((2X)^2+(−(4÷3)X^3)^2)` im `EQUA`-Modus liefert als Näherungslösung (auf eine Nachkommastelle gerundet) 2,1.

Für $t \approx 2{,}1$ haben die beiden Extrempunkte von f_t den Abstand 13 voneinander.