Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Geometrie/Stochastik B 2

Baden-Württemberg 2014

Aufgabe B 2.1

a)

1. SCHRITT: KOORDINATENGLEICHUNG ANGEBEN

Als Stützvektor einer Parametergleichung für E dient der Ortsvektor des Punktes A. Als Spannvektoren werden die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ herangezogen. Somit ergibt sich

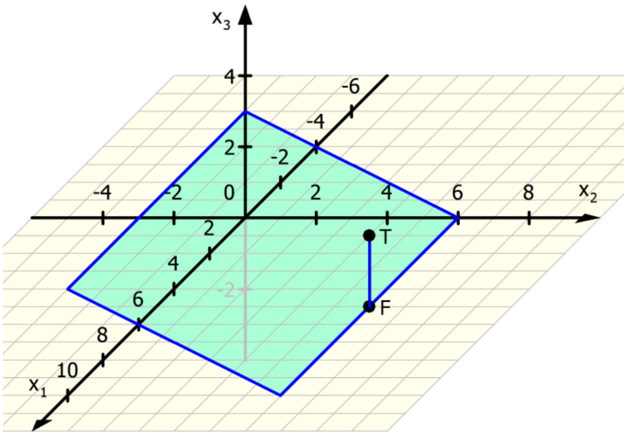
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

Die letzten zwei Koordinaten liefert die Gleichungen

$x_2 = 6 - 6s$ und $x_3 = 3s$.

Somit lässt sich der Parameter s eliminieren: $x_2 + 2x_3 = 6 - 6s + 2 \cdot 3s = 6$. Das liefert die Koordinatengleichung $E: x_2 + 2x_3 = 6$.

2. SCHRITT: ZEICHNUNG ERSTELLEN



3. SCHRITT: WINKEL BESTIMMEN

Der Schnittwinkel α zwischen Ebene und Geradenstück berechnet sich mithilfe des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Stabes und eines Normalenvektors

$\vec{n}$ der Ebene mit der Formel

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \vec{n}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot |\vec{n}|}.$$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ lässt sich aus der Koordinatengleichung für E ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Einsetzen in obige Formel liefert

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Da der spitze Winkel gesucht ist, folgt $\alpha \approx 63{,}4\,°$.

b)

1. SCHRITT: SCHATTENPUNKT BERECHNEN

Der Lichtstrahl verläuft entlang der Geraden l mit Stützpunkt L und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{LT}$, wobei $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OF} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}$ der Ortsvektor des oberen Endes des Stabes ist. Wegen $\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$ ist $l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ eine Parametergleichung von l.

Der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Platte entspricht dem gesuchten Schattenpunkt. Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts $P_t(8 - 3t|10 - 4t|2)$ in die Koordinatengleichung für E liefert

$10 - 4t + 2 \cdot 2 = 6$, also $8 = 4t \Leftrightarrow t = 2$.

Einsetzen dieses Parameters im allgemeinen Geradenpunkt von l liefert die Koordinaten des Schattenpunktes $S(2|2|2)$.

2. SCHRITT: BEGRÜNDUNG ANGEBEN

Jeder Punkt Q des Stabschattens liegt auf der geraden Strecke zwischen F und S, d. h. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} + r \cdot \overrightarrow{FS}$ für ein $r \in [0; 1]$. Dabei ist $\overrightarrow{FS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$, d. h. $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-3r\\6-4r\\2r\end{pmatrix}$ mit $0 \le r \le 1$.

Ein solcher Punkt liegt genau dann auf der Platte, wenn seine x_1-Koordinate zwischen denen von A und B und seine x_2-Koordinate zwischen denen von B und C liegt, d. h. wenn $0 \leq 5 - 3r \leq 10$ und $0 \leq 6 - 4r \leq 6$ gilt. Diese Bedingungen sind für alle $r \in [0; 1]$ erfüllt, also liegt der ganze Schatten des Stabes auf der Platte $ABCD$.

c)

3. SCHRITT: EBENE DER KREISBAHN ANGEBEN

Das obere Ende des Stabes hat die x_3-Koordinate 2. Deshalb bewegt sich die Lichtquelle L auf einer Kreisbahn, die in der Hilfsebene $H: x_3 = 2$ liegt.

4. SCHRITT: SCHNITTGERADE BESTIMMEN

Auf der Schnittgerade g von E und H liegen die möglichen Kollisionspunkte. Die Parametergleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

liefert für die x_3-Koordinate die Gleichung $x_3 = 3s$. Ein Vergleichung mit der Koordinatengleichung von H liefert $3s = 2 \Leftrightarrow s = \frac{2}{3}$. Diesen Wert setzen wir in die Parametergleichung von E ein und erhalten damit eine Parametergleichung der Schnittgeraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

4. SCHRITT: MÖGLICHE KOLLISIONSPUNKTE BESTIMMEN

Der Radius der Kreisbahn ist der Abstand von L zu T, also

$$|\overrightarrow{LT}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$$

Die möglichen Kollisionspunkte sind diejenigen Punkte auf g, deren Abstand zu T 5 LE beträgt. Der Abstand eines allgemeinen Geradenpunktes auf g zu T ist

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OT} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 5 - 10r \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(5 - 10r)^2 + (-4)^2}. \end{aligned}$$

Als Lösung für die Gleichung $\sqrt{(5 - 10r)^2 + (-4)^2} = 5$ liefert der GTR $r = 0{,}2$ und $r = 0{,}8$. Einsetzen in die Geradengleichung für g liefert die möglichen Schnittpunkte $S_1(8|2|2)$ und $S_2(2|2|2)$.

Aufgabe B 2.2

a)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG BESTIMMEN

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 800$ und $p = 0{,}05$.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

$(X \leq 30)$ kann im `STAT`-Modus des GTR berechnet werden:

Im `DIST`-Menü gibt die `BINM`-Option die Möglichkeit, mit dem Befehl `Bcd` die Daten einzugeben. Folgende Vorgaben liefern das Ergebnis 0,05705832:

```
Data:       Variable
x:          30
Numtrial:   800
p:          0.05
SaveRes:    None
```

Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 6 % sind höchstens 30 der entnommenen Bleistifte fehlerhaft.

Der Erwartungswert von X ist $E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}05 = 40$. Gesucht ist nun $P(|X - E(X)| < 10) = P(31 \leq X \leq 49) = P(X \leq 49) - P(X \leq 30)$, wobei laut GTR $P(X \leq 49) \approx 0{,}935$ und $P(X \leq 30) \approx 0{,}057$ ist. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$P(|X - E(X)| < 10) \approx 0{,}935 - 0{,}057 = 0{,}878.$

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG BESTIMMEN

Die Zufallsvariable Y beschreibe die Anzahl fehlerhafter Bleistifte. Y ist binomialverteilt mit Parametern $n = 800$ und p (unbekannt).

2. SCHRITT: TESTART BESTIMMEN

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit der Nullhypothese

$H_0\colon p \leq 0{,}02$

3. SCHRITT: ABLEHNUNGSBEREICH ERMITTELN

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Stichprobe viele fehlerhafte Bleistifte aufweist. Der Ablehnungsbereich hat daher die Form $\{g; g+1; \ldots; 800\}$ für ein $g \in \mathbb{N}_0$.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 fälschlicherweise abgelehnt wird. Das ist also die Wahrscheinlichkeit, dass $Y \geq g$ ausfällt, obwohl $p \leq 0{,}02$ ist. Am größten ist diese

Wahrscheinlichkeit, wenn $p = 0{,}02$ ist. Selbst in diesem Grenzfall soll $P(Y \geq g) \leq 0{,}05$ gewährleistet sein. Gesucht ist das kleinste g, bei dem diese Ungleichung für $p = 0{,}02$ noch erfüllt ist.

Die Ungleichung $P(Y \geq g) \leq 0{,}05$ ist äquivalent zu $\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq \mathrm{g}\text{-}1) \geq 0{,}95$.

Gibt man im `STAT`-Modus des GTR die Liste

1	20
2	21
3	22
4	23
5	24
6	25

als `List1` ein und bedient sich der `Bcd`-Funktion vermittels der `BINM`-Option im `DIST`-Menü, so kann man die weiteren Daten

```
Data:       List
List:       List1
Numtrial:   800
p:          0.02
Save Res:   None
```

eingeben und erhält aus Ausgabe die Liste

1	0.8704
2	0.9129
3	0.9436
4	0.9648
5	0.9788
6	0.9877

Der dritten und vierten Zeile entnimmt man

$P(Y \leq 22) \approx 0{,}9436$ und $P(Y \leq 23) \approx 0{,}9648$.

Das kleinste $g \in \mathbb{N}_0$ mit $P(Y \leq g - 1) \geq 0{,}95$ erfüllt somit $g - 1 = 23$, also $g = 24$.

Bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften verwirft man die Nullhypothese.