Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Geometrie/Stochastik B 1

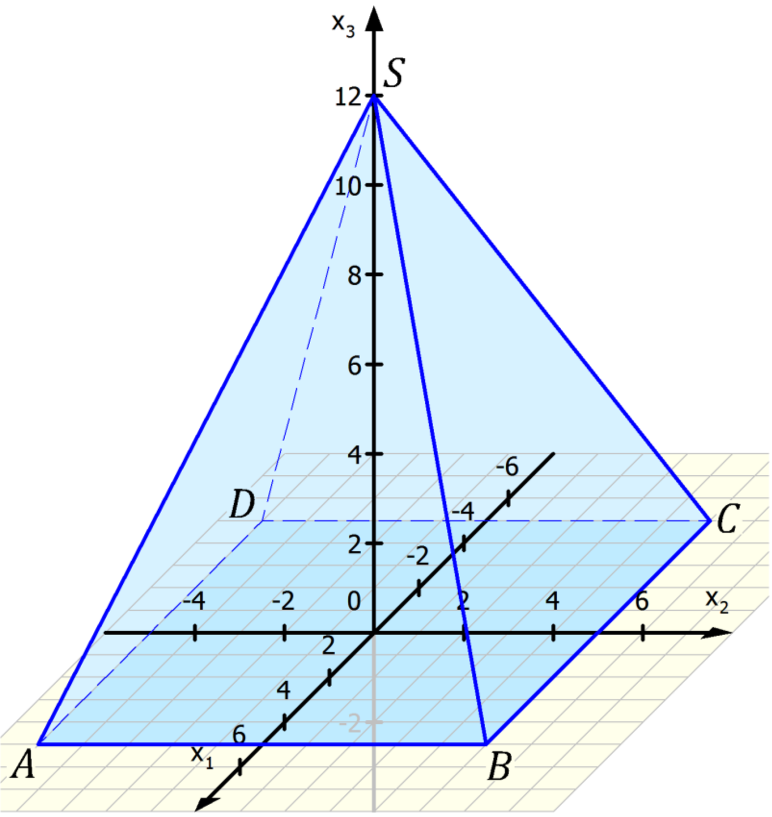
Baden-Württemberg 2014

Aufgabe B 1.1

a)

1. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN

Die Lage der Pyramide im Koordinatensystem ist wie folgt:



2. KOORDINATENGLEICHUNG DER EBENE ANGEBEN

Wählt man als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes S und als Spannvektoren die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$, so ergibt sich die Parametergleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Die letzten zwei Koordinaten eines allgemeinen Ebenenpunktes auf E lauten also

$$\begin{aligned} x_2 &= 5r + 5s = 5(r+s) \text{ und} \\ x_3 &= 12 - 12r - 12s = 12 - 12(r+s) \end{aligned}$$

Somit ist $12x_2 + 5x_3 = 60(r+s) + 60 - 60(r+s) = 60$, d. h. eine Koordinatengleichung von E ist gegeben durch

$E: 12x_2 + 5x_3 = 60.$

3. SCHRITT: SCHNITTWINKEL BESTIMMEN

Der Schnittwinkel zweier Ebenen ist der Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren.

Normalenvektor der Grundfläche F: $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor der Seitenfläche BCS (aus den Koeffizienten der Koordinatengleichung zusammengesetzt): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Der Schnittwinkel α erfüllt also

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{n_F}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{13}$$

$\Rightarrow \alpha \approx 67{,}4\,°$, da α spitz ist (siehe Skizze).

4. SCHRITT: FLÄCHENINHALT BERECHNEN

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCS ist

$$A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h,$$

wobei h die zur Grundseite BC gehörige Höhe des Dreiecks ist. Aufgrund der in der Skizze erkennbaren Symmetrie ist h der Abstand des Mittelpunktes M der Strecke BC zur Spitze S der Pyramide. Im rechtwinkligen Dreieck OMS sind die Kathetenlängen 12 (das ist Höhe der Spitze der Pyramide über der Grundfläche) und 5 (das ist der Abstand der Seite BC vom Ursprung) bekannt. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$12^2 + 5^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Die Länge $\overline{BC}$ ist der Abstand zwischen B und C, also

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 10.$$

Die gesuchte Fläche ist also

$$A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65 \text{ [FE]}.$$

b)

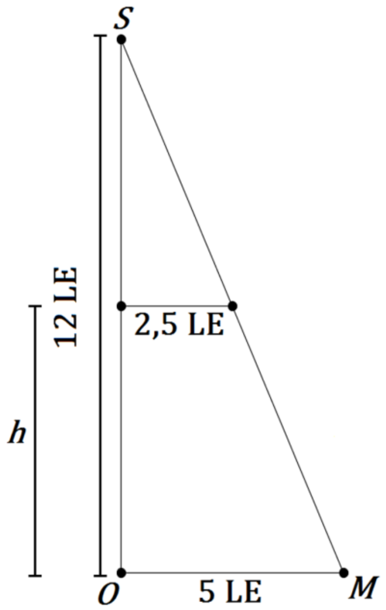
1. SCHRITT: QUADERVOLUMEN BESTIMMEN

Anhand der Skizze erkennt man, dass die x_3-Achse eine Drehsymmetrieachse der Pyramide ist: Der Körper bleibt bei Rotation um 90 ° um diese Achse unverändert. Dasselbe gilt daher für die Deckfläche des Quaders, die ein waagrechter Schnitt der Pyramide ist (denn die Grundfläche ist waagrecht). Somit ist die Deckfläche des Quaders ein Quadrat. Das Gleiche gilt auch für die Grundfläche.

Ein Eckpunkt der Grundfläche des Quaders ist gegeben; die anderen ergeben sich daraus durch wiederholte Spiegelung an den x_1x_3- und x_2x_3-Koordinatenebenen (also durch Vorzeichenwechsel der x_1- und x_2-Koordinaten).

Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche des Quaders ist aufgrund der Symmetrie der doppelte Abstand des Eckpunktes Q zur x_1x_3-Ebene, also der doppelte Betrag der x_2-Koordinate von $Q(2{,}5|2{,}5|0)$. Die Seitenlänge ist somit 5 LE.

Um die Höhe des Quaders zu ermitteln, wird der zweite Strahlensatz auf das oben betrachtete rechtwinklige Dreieck *OMS* angewendet:



Unten ist der Querschnitt der rechten Hälfte der Grundfläche der Pyramide und etwa in der Mitte die rechte Hälfte der Deckfläche des Quaders im selben Querschnitt (die Länge entspricht der x_2-Koordinate von Q). Nach dem zweiten Strahlensatz ist

$$\frac{12-h}{2{,}5}=\frac{12}{5},$$

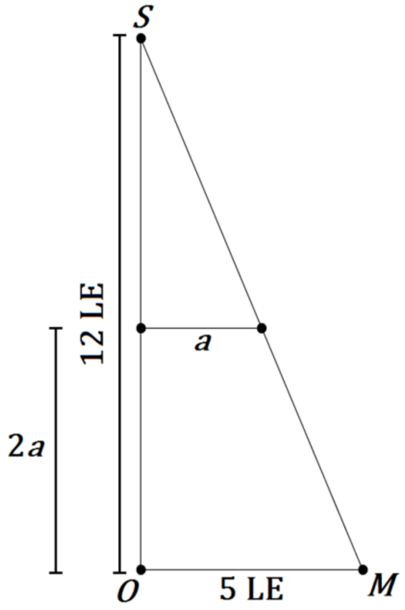
also $12-h=\frac{2{,}5}{5}\cdot 12=6$ und somit $h=6$ [LE].

Das Volumen des Quaders ist das Produkt aus Länge, Breite und Höhe (wobei Länge und Breite jeweils 5 LE betragen), also

$V=(5\text{ LE})^2\cdot 6\text{ LE}=25\cdot 6\text{ VE}=150\text{ VE}.$

2. SCHRITT: KOORDINATEN DER WÜRFELECKE AUF *BS* ERMITTELN

Die Kantenlänge des Würfels entspricht seiner Höhe und diese ist doppelt so lang, wie die rechte Hälfte seiner Deckfläche im Querschnitt:



Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{12-2a}{a}=\frac{12}{5},$$

also $60-10a=12a \Leftrightarrow 60=22a \Leftrightarrow a=\frac{30}{11}$.

Dies ist nun die x_2-Koordinate des gesuchten Eckpunktes P des Würfels. Wegen der Drehsymmetrie um die x_3-Achse ist auch die x_1-Koordinate von P gleich a. Die x_3-Koordinate hingegen ist die Höhe, die gleich der Seitenlänge ist, also $2a=\frac{60}{11}$ beträgt. Der gesuchte Punkt ist somit

$P\left(\frac{30}{11}\middle|\frac{30}{11}\middle|\frac{60}{11}\right).$

Aufgabe B 1.2

a)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG BESTIMMEN

Beim Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge ist die Zufallsvariable X, die zählt, wie oft eine schwarze Kugel gezogen wird, binomialverteilt. Da bei jedem Zug aus G1 6 von insgesamt 10 Kugeln schwarz sind, beträgt die Trefferwahrscheinlichkeit dann $p = 0{,}6$. Bei 20 Ziehungen ist der andere Parameter $n = 20$. Bei der Ziehung aus G2 ist $p = 0{,}3$ und $n = 8$.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

Gesucht ist zunächst die Wahrscheinlichkeit

$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$,

wobei $P(X \leq 11)$ im `STAT`-Modus des GTR berechnet werden kann:

Im `DIST`-Menü gibt die `BINM`-Option die Möglichkeit, mit dem Befehl `Bcd` die Daten einzugeben. Folgende Vorgaben liefern das Ergebnis 0,40440127:

```
Data:       Variable
x:          11
Numtrial:   20
p:          0.6
SaveRes:    None
```

Somit ist $P(X \geq 12) \approx 1 - 0{,}404 = 0{,}596$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 60 % werden genau 12 schwarze Kugeln gezogen.

Jede Möglichkeit dafür, dass bei 8 Ziehungen aus G2 genau zwei schwarze Kugeln gezogen werden, hat die Wahrscheinlichkeit

$0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6$.

Es gibt 7 solche Möglichkeiten, bei denen die zwei schwarzen Kugeln direkt hintereinander gezogen werden (entsprechend den 7 Möglichkeiten, die Position der ersten schwarzen Kugel festzulegen).

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 8-maligem Ziehen aus G2 genau zweimal schwarz gezogen wird und dabei die beiden schwarzen Kugeln direkt nacheinander gezogen werden, beträgt somit

$7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}074$.

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BEI DER ERSTEN ZIEHUNG

Beim zweimaligen Ziehen aus G1 gibt es drei Möglichkeiten für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln:

1. keine: es werden hintereinander zwei weiße Kugeln gezogen

2. eine: es wird entweder weiß, dann schwarz oder schwarz, dann weiß gezogen
3. zwei: es werden hintereinander zwei schwarze Kugeln gezogen.

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnen sich wie folgt:

1. zuerst wird eine der 4 weißen von insgesamt 10 Kugeln gezogen, dann eine der 3 weißen von insgesamt 9 Kugeln: $P(0 \text{ schwarze}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.
2. entweder es wird zuerst eine der 4 weißen von insgesamt 10 Kugeln gezogen, anschließen eine der 6 schwarzen von insgesamt 9, oder zuerst eine 6 schwarzen (von 10) und dann eine der 4 weißen (von 9): $P(1 \text{ schwarze}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}$.
3. zuerst wird eine der 6 schwarzen von insgesamt 10 Kugeln gezogen, dann eine der 5 schwarzen von insgesamt 9: $P(2 \text{ schwarze}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BEI DER ZWEITEN ZIEHUNG

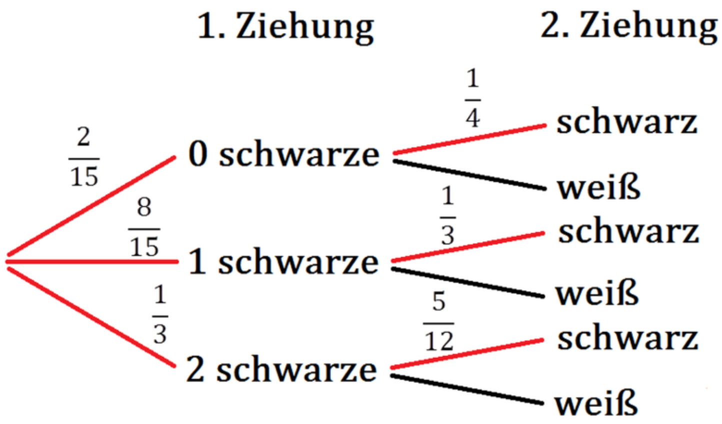
Es gibt drei Möglichkeiten, dass bei der zweiten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird, je nachdem, wie viele schwarzen Kugeln aus G1 nach der ersten Ziehung zu G2 hinzugefügt wurden.

Die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen, ist abhängig vom Ausgang der ersten Ziehung:

1. Wurde keine schwarze Kugel aus G1 gezogen, so sind 3 schwarze und 9 weiße Kugeln in G2, d. h. es wird mit Wahrscheinlichkeit $P(s|0 \text{ schwarze}) = \frac{3}{9+3} = \frac{1}{4}$ eine schwarze Kugel gezogen.
2. Wurde eine schwarze Kugel aus G1 gezogen, so sind 4 schwarze und 8 weiße Kugeln in G2, also ist $P(s|1 \text{ schwarze}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
3. Wurden zwei schwarze Kugeln aus G1 gezogen, so sind 5 schwarze und 7 weiße Kugeln in G2, also ist $P(s|2 \text{ schwarze}) = \frac{5}{12}$.

3. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN

Die oben berechneten Wahrscheinlichkeiten ergeben folgendes Baumdiagramm:



4. SCHRITT: PFADREGELN ANWENDEN

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der drei roten Pfade eintritt. Nach den Pfadregeln beträgt sie

$$\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{4}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}=\frac{7}{20}=0{,}35.$$

Die bei der Ziehung aus G2 gezogene Kugel ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 % schwarz.