Abitur Mathematik: Musterlösung

Stochastik II

Bayern 2013

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: GEGEBENE DATEN IN VIERFELDERTAFEL EINTRAGEN

	K	$\overline{K}$	
J			0,12
$\overline{J}$			0,88
	0,44	0,56	1

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT DES EREIGNISSES $J \cap \overline{K}$ BERECHNEN

$P(J \cap \overline{K}) = 0{,}56 : 7 = 0{,}08$

	K	$\overline{K}$	
J		0,08	0,12
$\overline{J}$			0,88
	0,44	0,56	1

3. SCHRITT: DIE RESTLICHEN FELDER AUSFÜLLEN

$P(J \cap K) = 0{,}12 - P(J \cap \overline{K}) = 0{,}12 - 0{,}08 = 0{,}04.$

$P(\overline{J} \cap \overline{K}) = 0{,}56 - P(J \cap \overline{K}) = 0{,}56 - 0{,}08 = 0{,}48.$

$P(\overline{J} \cap K) = 0{,}44 - P(J \cap K) = 0{,}44 - 0{,}04 = 0{,}4.$

	K	$\overline{K}$	
J	0,04	0,08	0,12
$\overline{J}$	0,4	0,48	0,88
	0,44	0,56	1

b)

1. SCHRITT: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

$$P_J(\overline{K}) = \frac{P(J \cap \overline{K})}{P(J)} = \frac{0{,}08}{0{,}12} = \frac{2}{3}$$

$$P_{\bar{J}}(\overline{K}) = \frac{P(\bar{J} \cap \overline{K})}{P(\bar{J})} = \frac{0{,}48}{0{,}88} = \frac{6}{11} = \frac{18}{33} < \frac{22}{33} = \frac{2}{3} = P_J(\overline{K})$$

2. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Der Anteil der Unentschlossenen ist zwar unter den Jungwählern größer als unter den übrigen Wahlberechtigten, aber es gibt viel weniger unentschlossene Jungwähler als unentschlossene Wahlberechtigte über 24, nämlich nur 8 % im Vergleich zu 48 %.

c)

1. SCHRITT: SITUATION MODELLIEREN

Aufgrund der großen Zahl von Wahlberechtigten im Vergleich zu den 48 Befragten kann die Anzahl X der Jungwähler unter den Befragten näherungsweise als binomialverteilt angenommen werden. Die Parameter sind $n = 48$ und $p = 0{,}12$. Gesucht ist $P(X = 6)$.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Mit der Bernoulli-Formel ergibt sich

$$P(X = 6) = \binom{48}{6} \cdot 0{,}12^6 \cdot 0{,}88^{42} \approx 0{,}1707.$$

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: NULLHYPOTHESE UND GEGENHYPOTHESE FESTLEGEN

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Wahlberechtigte die Partei A wählt.

$H_0: p \leq 0{,}5$ $\qquad$ $H_1: p > 0{,}5$

2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR $\boldsymbol{H_0}$ VISUALISIEREN

200 Wähler werden befragt. Sei X die Anzahl der Befragten, die sich für Partei A entscheiden würden. X kann näherungsweise als binomialverteilt angenommen werden, da die Anzahl der Befragten klein im Vergleich zur Gesamtbevölkerung der Stadt ist. Die möglichen Werte von X sind $0, 1, 2, \dots, c, c+1, \dots, 199$ und 200, wobei zwischen c und $c+1$ die Grenze zwischen Annahme- und Ablehnungsbereich verläuft. H_0 erscheint plausibel, wenn X klein ausfällt. Der Annahmebereich für H_0 ist daher der linke Abschnitt der möglichen Werte von X (von 0 bis c).

3. SCHRITT: PARAMETER c BESTIMMEN

Das Signifikanzniveau soll 5 % sein, d. h. die Nullhypothese darf mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % verworfen werden, wenn sie in Wirklichkeit zutrifft. H_0 wird fälschlicherweise verworfen wenn $p \leq 0{,}5$ ist, aber $X > c$ ausfällt. Das geforderte Signifikanzniveau wird also ausgedrückt durch die Bedingung

$$
\begin{aligned}
& P(X > c) \leq 0{,}05 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - P(X > c) \geq 1 - 0{,}05 \\
\Leftrightarrow\ & P(X \leq c) \geq 0{,}95.
\end{aligned}
$$

$P(X \leq c)$ sinkt, je größer p wird. Die Bedingung $P(X \leq c) \geq 0{,}95$ ist also genau dann für alle $p \leq 0{,}5$ erfüllt, wenn sie für $p = 0{,}5$ gewährleistet ist. Um zu sehen, welche c hier in Frage kommen, wird also X als binomialverteilt zu den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}5$ angenommen und eine kumulativen Verteilungstabelle zu Rate gezogen.

Man findet $P(X \leq 111) \approx 0{,}948$ und $P(X \leq 112) \approx 0{,}962$. Das kleinste c, das die geforderte Bedingung erfüllt, ist also $c = 112$.

4. SCHRITT: ENTSCHEIDUNGSREGEL AUFSTELLEN

Falls sich bei der Befragung höchstens 112 Wähler für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, wird die Nullhypothese $p \leq 0{,}5$ angenommen und die Kampagne durchgeführt.

b)

1. SCHRITT: FEHLER 1. ART BEI UNTERSCHIEDLICHEN NULLHYPOTHESEN VERGLEICHEN

1. MÖGLICHKEIT

$H_0\colon p \leq 0{,}5$; Fehler 1. Art wenn $p \leq 0{,}5$ und $X > 112$. In diesem Fall geht der Fehler 1. Art damit einher, dass die Kampagne nicht durchgeführt wird, obwohl sie nötig wäre. Die Wahrscheinlichkeit, die Erfolgschancen beim 1. Wahldurchgang so zu gefährden, wird durch das Signifikanzniveau von 5 % begrenzt.

2. MÖGLICHKEIT

$H_0\colon p > 0{,}5$; Fehler 1. Art wenn $p > 0{,}5$ und $X \leq 111$. In diesem Fall geht der Fehler 1. Art damit einher, dass die Kampagne durchgeführt wird, obwohl sie unnötig wäre. Die Wahrscheinlichkeit, dass dadurch unnötige Kosten anfallen, würde durch das Signifikanzniveau von 5 % begrenzt.

2. SCHRITT: WAHL DER NULLHYPOTHESE RECHTFERTIGEN

Das Anliegen der Wahlkampfberaterin ist es, den Kandidaten im ersten Wahlgang durchzubringen. Für sie sind die Kosten zweitrangig. Daher ist die 1. Möglichkeit aus ihrer Sicht sinnvoller als die 2. Möglichkeit.

Aufgabe 3

a)

1. SCHRITT: SITUATION MODELLIEREN

Ein Stadtrat kann höchstens einen Ausschusssitz einnehmen und die Reihenfolge der Besetzung spielt keine Rolle. Daher ist das Modell „Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge“ geeignet.

Die $N = 12$ Kugeln der Urne repräsentieren die 12 Ausschusskandidaten. Die Anzahl der Ziehungen $n = 3$ entspricht der Zahl der zu besetzenden Positionen. Die Anzahl $K = 8$ der schwarzen Kugeln (neben 4 weißen) entspricht der Anzahl der Frauen unter den 12 Kandidaten.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

Nach Laplace ist

$$P(X = k) = \frac{\text{Anzahl der möglichen Zusammenstellungen mit } k \text{ Frauen}}{\text{Anzahl aller möglichen Zusammenstellungen}}.$$

Um k der 8 Frauen und $3 - k$ der 4 Männer in den Ausschuss zu wählen, gibt es $\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}$ Möglichkeiten. Irgendwelche drei der 12 Kandidaten auszuwählen kann auf $\binom{12}{3}$ Arten geschehen. Somit ist

$$P(X = 1) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{3-1}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \cdot 6}{220} = \frac{12}{55} \text{ und}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{3-2}}{\binom{12}{3}} = \frac{28 \cdot 4}{220} = \frac{28}{55}.$$

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG VON X TABELLIEREN

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

2. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT BERECHNEN

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{55} + 1 \cdot \frac{12}{55} + 2 \cdot \frac{28}{55} + 3 \cdot \frac{14}{55} = \frac{1}{55}(12 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 14) = 2.$$

3. SCHRITT: VARIANZ BERECHNEN

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (0-2)^2 \cdot \frac{1}{55} + (1-2)^2 \cdot \frac{12}{55} + (2-2)^2 \cdot \frac{28}{55} + (3-2)^2 \cdot \frac{14}{55} \\ &= \frac{1}{55}(4 \cdot 1 + 1 \cdot 12 + 0 \cdot 28 + 1 \cdot 14) \\ &= \frac{30}{55} = \frac{6}{11}\,.\end{aligned}$$

c)

1. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT VON Y BERECHNEN

Da Y binomialverteilt ist, gilt

$$E(Y) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 = E(X).$$

2. SCHRITT: VARIANZ VON Y BERECHNEN

Da Y binomialverteilt ist, gilt

$$\text{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{22}{33} > \frac{18}{33} = \frac{6}{11} = \text{Var}(X).$$

3. SCHRITT: DIE ABBILDUNGEN VERGLEICHEN

In Abb. 1 ist der höchste Balken (beim Erwartungswert 2) höher als in Abb. 2 und der Balken des vom Erwartungswert 2 am weitesten entfernten Wertes (1) ist in Abb. 1 niedriger. Somit zeigt Abb. 1 eine geringere Streuung um den Erwartungswert, also eine kleinere Varianz als Abb. 2.