Abitur Mathematik: Musterlösung

Stochastik I

Bayern 2013

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: SITUATION MODELLIEREN

Es handelt sich näherungsweise um eine Bernoullikette der Länge $n = 25$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}37 + 0{,}06 = 0{,}43$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass $k = 10$ Erfolge eintreten.

2. SCHRITT: BERNOULLI-FORMEL ANWENDEN

$P(X = 10) = \binom{25}{10} \cdot 0{,}43^{10} \cdot 0{,}57^{15} = 0{,}1539.$

b)

1. SCHRITT: SITUATION MODELLIEREN

Es handelt sich näherungsweise um eine Bernoullikette der Länge $n = 25$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}35$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens $k = 13$ Erfolge eintreten. Sei also X eine zu den Parametern $n = 25$ und $p = 0{,}35$ binomialverteilte Zufallsvariable. Gesucht ist $P(X \geq 13)$.

2. SCHRITT: KUMULATIVE VERTEILUNGSTABELLE BENUTZEN

Laut Verteilungstabelle ist $P(X \leq 12) \approx 0{,}93956$. Also ist

$$\begin{aligned} P(X \geq 13) &= 1 - P(X \leq 12) \\ &\approx 1 - 0{,}93956 \\ &= 0{,}06044 \\ &\approx 6\,\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 1

c)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT EINES PASSENDEN SPENDERS ERMITTELN

Für einen Empfänger mit der Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- kommen als Spender nur Personen mit der Blutgruppe 0 und dem Rhesusfaktor Rh- oder Personen mit der Blutgruppe B und dem Rhesusfaktor Rh- in Frage.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Spender einen passenden Bluttyp aufweist, $6\ \% + 2\ \% = 8\ \%$.

2. SCHRITT: MINDESTZAHL DER SPENDER ERMITTELN

Sei X_n eine zu den Parametern n und $p = 0{,}08$ binomialverteilte Zufallsvariable. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass $P(X_n \geq 1) > 0{,}95$ gilt.

Dabei ist $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0{,}92^n$. Die zu lösende Ungleichung lautet also

$1 - 0{,}92^n > 0{,}95$	$\|-0{,}95 \; + 0{,}92^n$
$0{,}05 > 0{,}92^n$	logarithmieren
$\ln 0{,}05 > \ln(0{,}92^n)$	Logarithmengesetze anwenden
$\ln 0{,}05 > n \cdot \ln 0{,}92$	$\|: \ln 0{,}9$
$n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}92} \approx 35{,}9$	

Es müssen mindestens 36 Personen Blut spenden, damit mit mehr als 95%iger Sicherheit mindestens eine den passenden Bluttyp hat.

Aufgabe 2

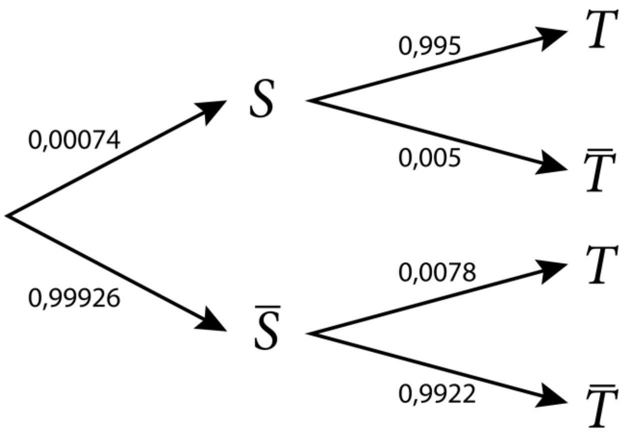
a)

$\overline{S \cup T}$ ist das Gegenereignis zu $S \cup T$, bei dem die Stoffwechselstörung vorliegt oder der Test positiv ausfällt (oder beides). Somit ist $\overline{S \cup T}$ das Ereignis, dass weder die Stoffwechselstörung vorliegt, noch der Test positiv ausfällt, d. h. der Test liefert korrekterweise ein negatives Ergebnis.

b)

1. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM

Die Angaben ergeben folgendes Baumdiagramm:



Mit der Pfadmultiplikationsregel ergeben sich die Einzelwahrscheinlichkeiten

$P(S \cap T) = 0{,}00074 \cdot 0{,}995 = 0{,}0007363$,

$P(S \cap \bar{T}) = 0{,}00074 \cdot 0{,}005 = 0{,}0000037$,

$P(\bar{S} \cap T) = 0{,}99926 \cdot 0{,}0078 = 0{,}007794228$ und

$P(\bar{S} \cap \bar{T}) = 0{,}99926 \cdot 0{,}9922 = 0{,}991465772$.

2. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUSFÜLLEN

	T	$\bar{T}$	
S	0,0007363	0,0000037	0,00074
$\bar{S}$	0,007794228	0,991465772	0,99926
	0,008530528	0,991469472	1,00000

Mit der Pfadadditionsregel ergibt sich somit
$P(T) = 0{,}008530528 \approx 0{,}85\ \%$.

3. SCHRITT: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT $P_T(S)$ BERECHNEN

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0007363}{0{,}008530528} \approx 0{,}086314.$$

4. SCHRITT: INTERPRETATION

Falls das Testergebnis positiv ist, leidet das Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 8,6 % tatsächlich unter einer Stoffwechselstörung.

c)

Es ist $P(S \cap \overline{T}) = 0{,}0000037 = \frac{3{,}7}{1000000}$ (s.o.). Somit leiden im Mittel 3,7 pro Million getesteter Kinder an der Stoffwechselstörung, obwohl das Testergebnis negativ ist.

Aufgabe 3

a)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR DREIMAL ROT BERECHNEN

Beim ersten Zug befinden sich 9 Kugeln in dem Behälter, darunter drei rote. Die Wahrscheinlichkeit für rot im ersten Zug ist daher $\frac{3}{9}$.

Wurde beim ersten Zug rot gezogen, so gibt es beim zweiten Zug noch 2 rote von insgesamt 8 Kugeln. Wird wieder eine rote Kugel gezogen, so bleiben noch 7 Kugeln, von denen eine rot ist.

Die Wahrscheinlichkeit für drei rote Kugeln ist demnach

$$P(rrr) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84}.$$

2. SCHRITT: GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Da anfangs von jeder Farbe gleich viele Kugeln im Behälter sind, gilt $P(bbb) = P(ggg) = P(rrr)$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$P(\text{Gewinn}) = P(bbb) + P(ggg) + P(rrr) = 3 \cdot P(rrr) = 3 \cdot \frac{1}{84} = \frac{1}{28}.$$

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSFUNKTION BESTIMMEN

Die Variable a stehe für den Auszahlungsbetrag (in €) und die Zufallsgröße X gebe an, wie viel die Kinderstation bei einem Spieldurchgang einnimmt (ebenfalls in €). X kann nur die Werte 2 (falls der Spieler nicht gewinnt) und $2 - a$ (falls der Spieler gewinnt) annehmen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ergibt sich auch Teilaufgabe a):

x	2	$2 - a$
$P(X = x)$	$\frac{27}{28}$	$\frac{1}{28}$

2. SCHRITT: GLEICHUNG FÜR DEN ERWARTUNGSWERT AUFSTELLEN

Es soll langfristig eine Einnahme von 1,25 € pro Spiel erzielt werden, d. h. der Erwartungswert von X soll 1,25 betragen. Dabei ist

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot P(X=2) + (2-a) \cdot P(X = 2-a) \\ &= 2 \cdot \frac{27}{28} + (2-a) \cdot \frac{1}{28} \\ &= \frac{54 + 2 - a}{28} \\ &= \frac{56-a}{28} \,. \end{aligned}$$

Die Variable a muss also die Bedingung

$$\frac{56-a}{28} = 1{,}25 = \frac{5}{4}$$

erfüllen.

3. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\frac{56-a}{28} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 56 - a = \frac{5 \cdot 28}{4} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$\Leftrightarrow a = 56 - 35 = 21$$

Wenn im Falle eines Gewinns 21 € ausbezahlt werden, dann kann man langfristig pro Spiel mit einer Einnahme von 1,25 € rechnen.