Abitur Mathematik: Musterlösung

Geometrie II

Bayern 2013

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: KOORDINATEN DES PUNKTS B ANGEBEN

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow B(12|12|0)$

2. SCHRITT: VOLUMEN BERECHNEN

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$, wobei G die Fläche des quadratischen Bodens und h die Höhe der Pyramide ist. Der Boden hat die Seitenlänge 12, also die Fläche 144. Die Höhe der Pyramide ist die x_3-Koordinate der Spitze S, also 8. Somit ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384 \text{ [VE]}$$

Der Pavillon hat ein Volumen von 384 m^3.

b)

Für die Ebenengleichung braucht man einen Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren.

1. SCHRITT: VEKTOREN $\overrightarrow{BC}$ UND $\overrightarrow{BS}$ BESTIMMEN

Für die Normalenform werden ein Aufpunkt und ein Normalenvektor benötigt, der sich aus zwei Richtungsvektoren errechnen lässt. Als Richtungsvektoren eignen sich

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: NORMALENVEKTOR DER EBENE BERECHNEN

Ein Normalenvektor ist gegeben durch

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 8 - 0 \cdot (-6) \\ 0 \cdot (-6) - (-12) \cdot 8 \\ (-12) \cdot (-6) - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix}$. Der Einfachheit halber arbeiten wir mit dem Normalenvektor

$\vec{n} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 96 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. SCHRITT: NORMALENFORM ERMITTELN

Als Aufpunkt der Ebene eignet sich der Punkt C. Eine Normalenform der Ebene lautet somit

$E: \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OC}\right) = 0$, wobei

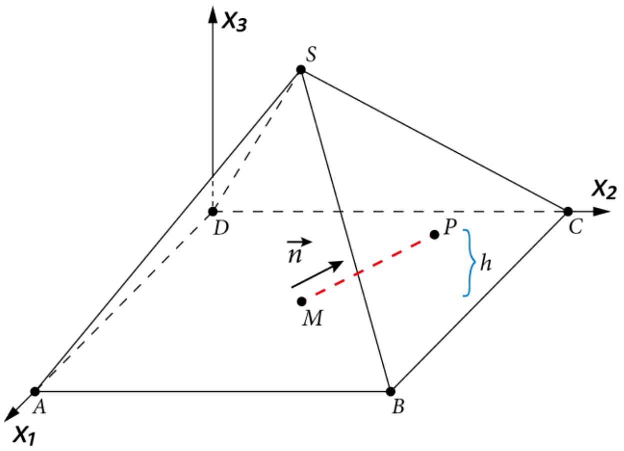
$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OC}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 12 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot x_1 + 4 \cdot (x_2 - 12) + 3 \cdot x_3 \\ &= 4x_2 + 3x_3 - 48 \end{aligned}$$

gilt. Demnach ist $E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$ eine Gleichung für E in Normalenform.

c)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Gesucht ist die x_3-Koordinate des Punktes P, an dem die Strebe die Außenwand berührt. Die Strebe ist ein Abschnitt der Geraden durch P und den Mittelpunkt M der Grundfläche:



2. SCHRITT: KOORDINATEN DES PUNKTES M BERECHNEN

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow M(6|6|0)$

3. SCHRITT: ZU E SENKRECHTE GERADE g DURCH M BESTIMMEN

Als Aufpunkt der Geraden eignet sich M.

Die Strebe soll die kürzeste Verbindung von M zur Ebene E sein, also muss sie senkrecht auf E stehen. Als Richtungsvektor der Geraden g eignet sich daher der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Somit ergibt sich die Parameterform

$$g: \vec{X} = \overrightarrow{OM} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. SCHRITT: ALLGEMEINEN GERADENPUNKT VON g IN E EINSETZEN

P ergibt sich als Schnittpunkt von g und E. Der allgemeine Geradenpunkt ist $(6|6+4\lambda|3\lambda)$. Diesen Punkt in E eingesetzt liefert eine Gleichung für den Parameter λ des Punktes P:

$$\begin{aligned} & 4(6+4\lambda) + 3 \cdot 3\lambda - 48 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 16\lambda + 24 + 9\lambda - 48 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 25\lambda - 24 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = 0{,}96 \end{aligned}$$

5. SCHRITT: x_3-KOORDINATE DES SCHNITTPUNKTES BERECHNEN

Die Gerade g hat die allgemeine x_3-Koordinate 3λ. Die x_3-Koordinate des Schnittpunktes ist also $3 \cdot 0{,}96 = 2{,}88$. Da eine Längeneinheit 1 m entspricht, ist die Strebe in einer Höhe von 2,88 m an der Außenwand befestigt.

d)

1. SCHRITT: 2 SEITEN DES DREIECKS ALS VEKTOREN DARSTELLEN

Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Seiten $[SB]$ und $[SC]$ mit B' bzw. C'. Es ist

$$\overrightarrow{SB'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: KREUZPRODUKT $\overrightarrow{SB'} \times \overrightarrow{SC'}$ BERECHNEN

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) - (-4) \cdot 3 \\ (-4) \cdot (-3) - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: FLÄCHENINHALT BERECHNEN

$$A_{SB'C'} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SB'} \times \overrightarrow{SC'}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{24^2 + 18^2} = 15 \text{ [FE]}$$

Eine Längeneinheit entspricht 1 m, d. h., der Inhalt der von den Solarmodulen bedeckten Fläche beträgt 15 m^2.

e)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Der Neigungswinkel von E zur Horizontalen ist der Schnittwinkel der Ebene E mit der x_1-x_2-Ebene. Dieser Schnittwinkel entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren.

2. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN DEN NORMALENVEKTOREN BERECHNEN

Die x_1x_2-Ebene hat den Normalenvektor $\overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Winkel φ zwischen diesen Vektoren erfüllt

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_3} \circ \vec{n}}{|\overrightarrow{n_3}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{25}} = 0{,}6$$

$\Longrightarrow \varphi \approx 53{,}13\,°$

3. SCHRITT: ERREICHBAREN ANTEIL AN DER MAXIMALEN LEISTUNG ABSCHÄTZEN

Der Neigungswinkel liegt zwischen 50 ° und 60 °. Demnach liegt der zu schätzende Anteil an der Maximalleistung zwischen 94 % und 98 %. Geht man näherungsweise von einer linearen Abnahme der Leistung mit dem Neigungswinkel im Bereich zwischen 50 ° und 60 ° aus, so ergibt sich als Schätzwert s_1 für die prozentuale Ausbeute

$$s_1 = 98\,\% + \frac{\varphi - 50\,°}{60\,° - 50\,°} \cdot \left(94\,\% - 98\,\%\right) \approx 98\,\% - 0{,}313 \cdot 4\,\% \approx 96{,}7\,\%.$$

Bemerkung:

Ein Blick auf die Abnahme der Leistung pro 10 ° im Bereich von 40 ° bis 80 ° zeigt aber, dass die Ausbeute nicht linear vom Neigungswinkel abhängt, sondern die Leistungsabnahme wird mit zunehmendem Neigungswinkel immer deutlicher. Da φ kleiner ist, als die Mitte des Intervalls [50 °; 60 °], sollte daher für die Berechnung des Schätzwertes die Abnahme über das Intervall $\left(94\,\% - 98\,\%\right)$ mit einem Faktor $\mu < 1$ skaliert werden, d. h. es ist zu erwarten, dass die tatsächliche Ausbeute etwas oberhalb von s_1 liegt, etwa bei $s_2 = 97\,\%$.

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: GERADENTERME GLEICHSETZEN UND VEREINFACHEN

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM AUFSTELLEN

Aus Schritt 1 entnehmen wir 3 Gleichungen für die 2 Unbekannten λ und μ:

I: $3\lambda - \mu = -9$
II: $\lambda + 2\mu = 4$
III: $2\lambda - 4\mu = -16$

Um λ zu eliminieren lösen wir $2 \cdot \text{II} - \text{III}$:

$2\lambda + 4\mu - (2\lambda - 4\mu) = 8 - (-16) \Leftrightarrow 8\mu = 24 \Leftrightarrow \mu = 3.$

4. SCHRITT: KOORDINATEN DES SCHNITTPUNKTES BESTIMMEN

Die Koordinaten von T ergeben sich durch Einsetzen von $\mu = 3$ in die Geradengleichung von h:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 5-6 \\ -9+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T(2|-1|3)$

b)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Als P wählen wir den Geradenpunkt auf g, der von T aus durch Verschiebung um den Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden entsteht. Q erhalten wir dann als Spiegelung von P an T, d. h. indem wir T um $-\vec{v}$ statt um $\vec{v}$ verschieben.

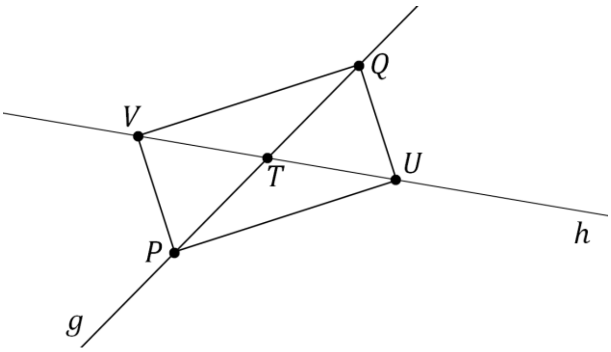
2. SCHRITT: KOORDINATEN VON P UND Q BERECHNEN

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P(5|0|5)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OT} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(-1|-2|1)$$

c)

1. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN



2. SCHRITT: EINEN LÖSUNGSWEG BESCHREIBEN

Der Punkt T ist der Mittelpunkt des Rechtecks, d. h. alle vier Eckpunkte haben denselben Abstand zu T, nämlich $d = |\overrightarrow{PT}|$. U und V entstehen aus T durch Verschiebung um ein geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ von h (einmal in positive Richtung und einmal in die entgegen gesetzte Richtung), also gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, so dass $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist. Der Abstand von U zu T ist dann $d(U,T) = \left|\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OU}\right|$ und hängt von t ab. Setzt man $d(T,U) = d$, so erhält man eine Gleichung für t mit genau einer positiven Lösung. Diesen Wert setzt man dann in die Gleichungen $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein und erhält damit die Koordinaten der Punkte $U(2+t|-1-2t|3+4t)$ und $V(2-t|-1+2t|3-4t)$.