Abitur Mathematik: Musterlösung

Geometrie I

Bayern 2013

Aufgabe a

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Die Koordinaten von C sind die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{PC}$ (denn $\vec{P}$ ist der Ursprung). Dabei ist $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AD}$, denn $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

2. SCHRITT: KOORDINATEN VON C BERECHNEN

$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist vorgegeben und

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

C hat somit die Koordinaten $(20|10|6)$.

3. SCHRITT: NACHWEISEN, DASS ALLE SEITEN GLEICH LANG SIND

Die Fläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Ein Parallelogramm ist genau dann ein Quadrat, wenn benachbarte Seiten gleich lang sind und alle Innenwinkel rechte Winkel sind. Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist 10. Die Länge der Seite $\overline{AD}$ ist $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$. Somit sind zwei benachbarte Seiten gleich lang und es folgt aus der Gleichheit der Länge gegenüberliegender Seiten im Parallelogramm, dass alle Seiten gleich lang sind.

4. SCHRITT: RECHTE WINKEL NACHWEISEN

Benachbarte Innenwinkel im Parallelogramm ergänzen sich immer zu 180 ° und gegenüber liegende Winkel sind gleich groß. Wenn also ein Innenwinkel 90 ° beträgt, dann handelt es sich um ein Rechteck.

Es ist

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0,$$

also ist der Innenwinkel $\sphericalangle(BAD) = 90$ ° und $ABCD$ somit ein Rechteck mit gleich langen Seiten (nach Schritt 3). Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat.

Aufgabe b

1. SCHRITT: NORMALENVEKTOR DER EBENE BESTIMMEN

Die Ebene E wird ausgehend vom Punkt $A(28|0|0)$ von den zwei Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannt. Ein Normalenvektor ergibt sich als Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 6 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 0 - 10 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen den einfacheren Normalenvektor $\vec{n} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Eine Normalenform der Ebene lautet somit

$E: \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{PA}\right) = 0$, wobei

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{PA}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 28 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (x_1 - 28) + 0 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \\ &= 3x_1 + 4x_3 - 84 \end{aligned}$$

gilt. Demnach ist $E: 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$ eine Gleichung für E in Normalenform.

Aufgabe c

Der Winkel φ zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 entspricht dem Winkel zwischen deren Normalenvektoren.

Normalenvektor der x_1-x_2-Ebene: $\overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für den Winkel φ gilt

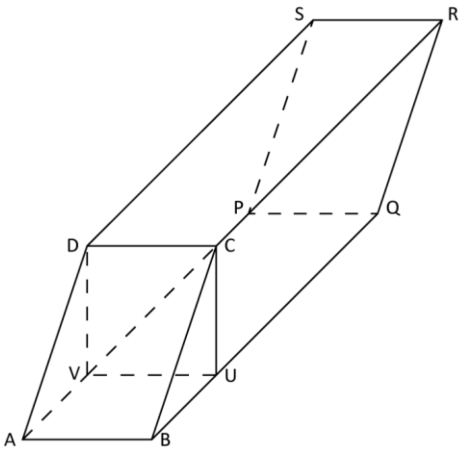
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_3} \circ \vec{n}}{|\overrightarrow{n_3}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{25}} = 0{,}8 \Longrightarrow \varphi \approx 36{,}87\,°.$$

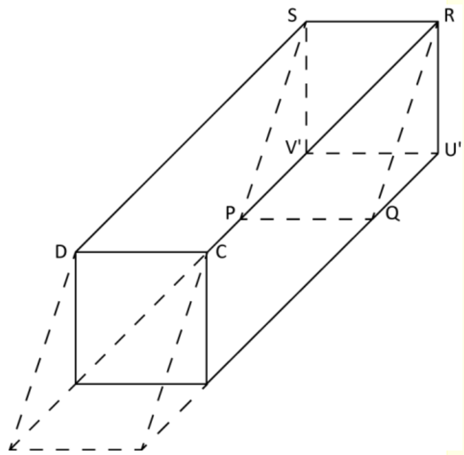
Aufgabe d

Die Ebene F ist parallel zur Ebene E. Sie hat demnach eine Gleichung der Form $F\colon 3x_1 + 4x_3 + d = 0$, die sich nur um eine Konstante von der Gleichung von E unterscheidet. Da F durch den Ursprung geht, ist $d = 0$, also $F\colon 3x_1 + 4x_3 = 0$.

Aufgabe e

1. SCHRITT: AUS DEM SPAT EINEN QUADER MACHEN





Sei U der Lotpunkt von C auf $\overline{BQ}$ und V der Lotpunkt von D auf $\overline{AP}$. Schneidet man das gerade Prisma $ABUVCD$ aus dem Spat heraus und fügt es am hinteren Ende wieder an (so dass die das Quadrat $ABCD$ am Quadrat $PQRS$ anliegt), so ergibt sich ein Quader mit demselben Volumen wie der ursprüngliche Spat.

2. SCHRITT: GIB DAS VOLUMEN DES QUADERS AN

Die rechteckige Grundfläche $UU'VV'$ des Quaders hat denselben Flächeninhalt G wie die Grundfläche $ABQP$ des Spats, denn beide

Grundflächen haben dieselbe Länge und dieselbe Breite. Außerdem stimmen die Höhen von Spat und Quader überein, denn es handelt sich jeweils um den Abstand h von C zu U.

Somit gilt für beide Körper $V = G \cdot h$.

Aufgabe f

1. SCHRITT: VOLUMEN BERECHNEN

$V = G \cdot h = (28 \cdot 10) \cdot 6 = 1680$ [VE], wobei $1\ \text{VE} = (1\ \text{LE})^3$. Da 1 LE 0,1 m entspricht, ist 1 VE im Modell $(0{,}1\ \text{m})^3 = 0{,}001\ \text{m}^3$. Das Volumen des Grundkörpers beträgt somit $1{,}68\ \text{m}^3$.

2. SCHRITT: MASSE BERECHNEN

Die Dichte ist nach Vorgabe $\rho = 2{,}1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$, so dass sich die Masse zu

$$m = V \cdot \rho = 1{,}680\ \text{m}^3 \cdot 2{,}1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 1{,}68 \cdot 2{,}1\ \text{t} = 3{,}528\ \text{t} = 3528\ \text{kg}$$

ergibt.

Aufgabe g

1. SCHRITT: DIAGONALENSCHNITTPUNKT T BESTIMMEN

Aus der Abbildung liest man eine halbe Diagonalenlänge ab:

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $T(14|5|0)$. Die Gerade h geht durch T und durch $H(11|3|6)$.

2. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG AUFSTELLEN

Aufpunkt: H

Richtungsvektor: $\overrightarrow{HT} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Gleichung:

$$h: \vec{x} = H + \lambda \cdot \overrightarrow{HT} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

3. SCHRITT: UNTERES ENDE DER STANGE BESTIMMEN

Länge der Bohrung:

$^1/_4$ von 1,4 m ist 0,35 m; das sind 3,5 Längeneinheiten. Das untere Ende S_u der Stange liegt auf der Geraden h, also ist $\overrightarrow{PS_u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\left|\overrightarrow{PS_u} - \overrightarrow{PH}\right| = 3{,}5$ ist also

$$\left|\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow |\lambda| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow |\lambda|\sqrt{9+4+36} = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow 7|\lambda| = 3{,}5 \Leftrightarrow |\lambda| = 0{,}5.$$

Da S_u unterhalb von H liegt und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ eine negative z-Komponente hat, ist das gesuchte λ positiv, d. h. $\lambda = 0{,}5$.

4. SCHRITT: KOORDINATEN DES STANGENENDES BESTIMMEN

Einsetzen von $\lambda = 0{,}5$ in die Geradengleichung für h liefert

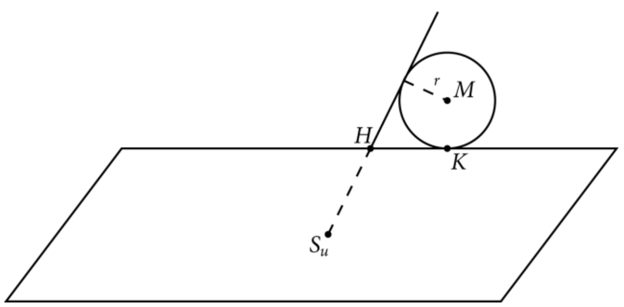
$$\overrightarrow{PS_u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt, in dem die Stange endet, hat also die Koordinaten $S_u(12{,}5|4|3)$.

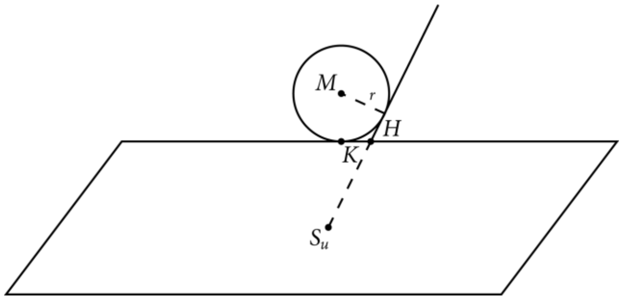
Aufgabe h

1. SCHRITT: SKIZZE

Es sei $r = 8$ der Radius der Kugel im Modell und M der Kugelmittelpunkt. Dann sieht die Konstellation wie folgt aus:



Oder



2. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR BERÜHRUNG FORMULIEREN

Der Teil der Stange oberhalb des Grundkörpers hat eine Länge von $3/4 \cdot 14\text{ LE} = 10{,}5\text{ LE} > 8\text{ LE} = r$, also kann die Kugel das obere Ende der Stange nicht berühren.

Die Stahlkugel berührt daher genau dann die Stange, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes M zur Geraden h dem Radius r der Kugel entspricht.

3. SCHRITT: LÖSUNGSWEG BESCHREIBEN

Aus den Koordinaten von K können die Koordinaten des Kugelmittelpunktes M ermittelt werden: M liegt 8 LE senkrecht über K, d. h. $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PK} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun muss noch der Abstand des Punktes M zur Geraden h bestimmt werden. Dazu ermittelt man zuerst den Lotfußpunkt F_M des Lotes von M auf h. Da F_M auf h liegt, gilt $\overrightarrow{PF_M} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Parameter λ ergibt sich aus der Bedingung, dass die Verbindungsstrecke von M nach F_M senkrecht auf h stehen muss, was durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \overrightarrow{PM} \right) = 0$$

ausgedrückt wird. Diese Gleichung wird nach λ aufgelöst, um den Wert des Parameters zu finden. Dieser wird dann in die Geradengleichung eingesetzt, um die Koordinaten von F_M zu erhalten.

Damit erhält man $d(M, h) = d(M, F_M)$ und kann prüfen, ob dieser Wert mit dem Radius $r = 8$ der Kugel übereinstimmt.