Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis II

Bayern 2013

Aufgabe 1

1. SCHRITT: DEFINITIONSMENGE

Das Argument der Logarithmusfunktion muss positiv sein.

Es muss also gelten:

$2013 - x > 0$
$\Leftrightarrow x < 2013$

2. SCHRITT: GRENZWERTE

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2013 - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \nearrow 2013} \ln(2013 - x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$

3. SCHRITT:SCHNITTPUNKTE MIT DEN KOORDINATENACHSEN

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$\ln(2013 - x) = 0 \Leftrightarrow 2013 - x = e^0 \Leftrightarrow x = 2013 - e^0 = 2012$

FUNKTIONSTERM NULL SETZEN

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$y = \ln 2013 \approx 7{,}6$

FUNKTIONSWERT AN DER STELLE $x = 0$

Aufgabe 2

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BERECHNEN

$f(x) = x \cdot \sin x$
$\Rightarrow f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$

$$\Rightarrow f''^{(x)} = \cos x + \cos x + x \cdot (-\sin x)$$
$$= 2 \cdot \cos x - x \cdot \sin x$$

2. SCHRITT: $f''(0)$ BESTIMMEN

$f''(0) = 2 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2.$

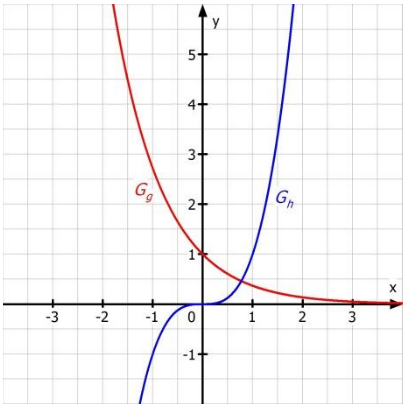
3. SCHRITT: KRÜMMUNGSVERHALTEN ANGEBEN

Es ist $f''(0) = 2 > 0$. Der Funktionsgraph ist daher in unmittelbarer Nähe des Ursprungs linksgekrümmt.

Aufgabe 3

a)

Die Funktion $g(x) = e^{-x}$ ist die an der y-Achse gespiegelte Exponentialfunktion.



h ist streng monoton steigend und g ist streng monoton fallend. Also können die Graphen höchstens einen Schnittpunkt haben. In der linken Halbebene ist h negativ und g positiv, also $h < g$. Für $x \longrightarrow \infty$ strebt $h(x)$ gegen Unendlich, $g(x)$ aber gegen null. Somit wird h schließlich größer als g. Aus Stetigkeitsgründen müssen sich daher die Graphen schneiden.

b)

1. SCHRITT: DIFFERENZFUNKTION AUFSTELLEN UND ABLEITEN

$$\begin{aligned} d(x) &= g(x) - h(x) \\ &= e^{-x} - x^3 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$$

2. SCHRITT: NÄHERUNGSWERT x_1 BESTIMMEN

Die Gleichung $e^{-x} = x^3$ für die Schnittstelle von G_g und G_h ist gleichbedeutend mit $e^{-x} - x^3 = 0$. Die Schnittstelle ist also genau die Nullstelle der Funktion d, die näherungsweise mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden kann. Setze

$x_1 = x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)}$, wobei

$x_0 = 1$,
$d(1) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0{,}63$ und
$d'^{(1)} = -\frac{1}{e} - 3 \approx -3{,}37$ gilt. Somit ist

$$x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{e} - 1}{-\frac{1}{e} - 3} = 1 - \frac{1-e}{-1-3e}$$
$$= 1 - \frac{e-1}{1+3e} = \frac{1+3e-e+1}{1+3e}$$
$$= \frac{2+2e}{1+3e} \approx 0{,}81$$

Aufgabe 4

a)

$F(0) = 0$ (Fläche eines unendlich dünnen Streifens)

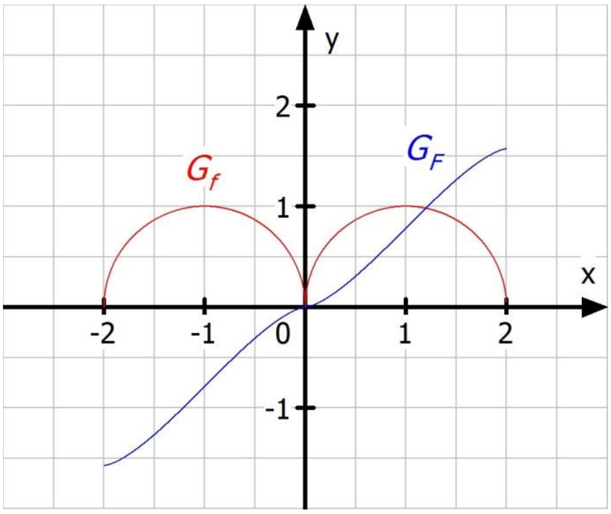
$F(2)$ entspricht der Fläche des Halbkreises vom Radius 1, d h.

$F(2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57.$

$F(-2) = -\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$ (in negative x-Richtung durchlaufene Halbkreisfläche).

b)

Unter Berücksichtigung der in a) berechneten Funktionswerte und der waagrechten Tangenten bei den Nullstellen von f ergibt sich folgender Graph der Integralfunktion F:



Teil 2

Aufgabe 1

a)

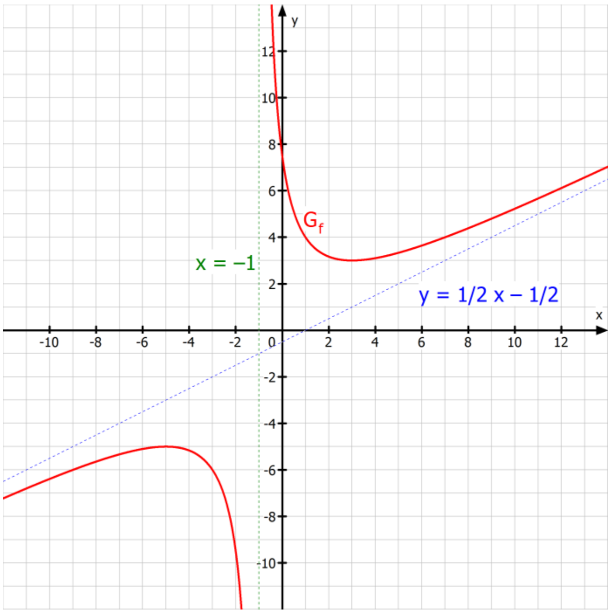
1. SCHRITT: GLEICHUNGEN DER ASYMPTOTEN BESTIMMEN

Wegen $\lim\limits_{x \to -1} |f(x)| = \infty$ ist die Definitionslücke nicht hebbar, also hat f die Gerade $x = -1$ als senkrechte Asymptote.

Es ist $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$, wobei $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x+1} = 0$, also nähert sich f für $x \to \pm\infty$ der schrägen Asymptote $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Gäbe es einen Schnittpunkt von G_f mit der schrägen Asymptote, so gälte für dessen x-Koordinate $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = f(x)$, also $\frac{8}{x+1} = 0$, was aber für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

2. SCHRITT: ASYMPTOTEN EINZEICHNEN



b)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BERECHNEN

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 8 \cdot (x+1)^{-1}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - 8 \cdot (x+1)^{-2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}$$

$$\Longrightarrow f''(x) = 16 \cdot (x+1)^{-3}$$
$$= \frac{16}{(x+1)^3}$$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2} = 0 \qquad \Big| + \frac{8}{(x+1)^2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{8}{(x+1)^2} \qquad \Big| \cdot 2(x+1)^2$$
$$(x+1)^2 = 16 \qquad | \text{ Wurzel ziehen}$$
$$x + 1 = \pm 4 \qquad | -1$$
$$x = -1 \pm 4$$
$$x = -5 \text{ oder } x = 3$$

3. SCHRITT: MITTELS 2. ABLEITUNG ART DER EXTREMPUNKTE BESTIMMEN

$$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$$

$$\Longrightarrow f''(-5) = -0{,}25 < 0 \Longrightarrow G_f \text{ hat einen Hochpunkt bei } x = -5$$

$f''(3) = 0{,}25 > 0 \Longrightarrow G_f$ hat einen Tiefpunkt bei $x = 3$

4. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE AN DEN EXTREMSTELLEN BERECHNEN

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$

$\Longrightarrow f(-5) = -5 \Longrightarrow$ Hochpunkt: $(-5|-5)$

$f(3) = 3 \Longrightarrow$ Tiefpunkt: $(3|3)$

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: FUNKTIONSTERM VON g BESTIMMEN

Nach Verschiebung um 1 LE in positive y-Richtung lautet der Funktionsterm $f(x) + 1$. Anschließende Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung liefert den Funktionsterm

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x-1+1} + 1 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\,. \end{aligned}$$

2. SCHRITT: PUNKTSYMMETRIE NACHWEISEN

Die Funktion g ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Bedingung $g(-x) = -g(x)$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{2}(-x) + \frac{8}{(-x)} \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{8}{x} \\ &= -\left(\frac{1}{2}x + \frac{8}{x}\right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

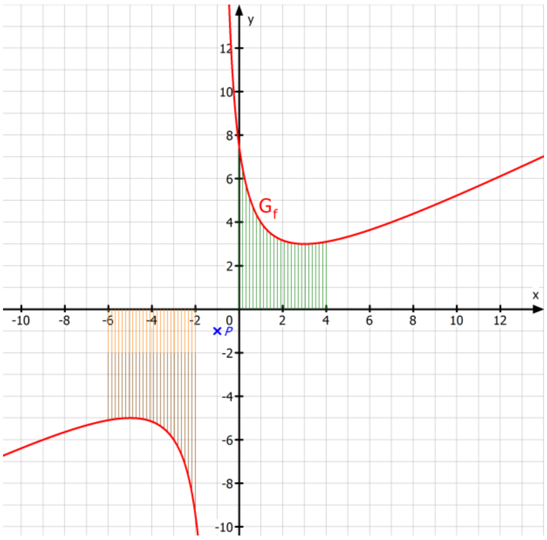
Somit ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung. G_g geht durch Verschiebung aus G_f hervor, während der Ursprung aus dem Punkt $P(-1|-1)$ hervorgeht. Folglich ist G_f symmetrisch um P.

b)

1. SCHRITT: INTEGRAL VON 0 BIS 4 BERECHNEN

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8 \cdot \ln(x+1)\right]_0^4$$
$$= 4 - 2 + 8 \cdot \ln 5 - 8 \cdot \ln(1)$$
$$= 2 + 8 \cdot \ln(5)$$
$$\approx 14{,}88$$

2. SCHRITT: SKIZZE



3. SCHRITT: INTEGRAL VON -6 BIS -2 BESTIMMEN

Da G_f im Bereich $-6 \leq x \leq 2$ unterhalb der x-Achse liegt, ist das Integral negativ. Sein Betrag ist der Flächeninhalt der in der Skizze braun und orange markierten Fläche. Dabei entsteht die braun markierte Fläche aus der grünen durch Drehung um 180 ° um den Symmetriepunkt P, so dass dessen Flächeninhalt ebenfalls $2 + 8 \cdot \ln(5)$ FE beträgt. Dazu kommt das orange markierte Rechteck der Höhe 2 LE und der Breite 4 LE. Es hat also den Flächeninhalt 8 FE. Somit ist

$$\int_{-6}^{-2} f(x)dx = -\left(\int_0^4 f(x)dx + 8\right) = -10 - 8\ln 5 \approx -22{,}88[FE].$$

Aufgabe 3

a)

1. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE BERECHNEN

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$$
$\Longrightarrow f(0) = 7{,}5$ und $f(15) = 7{,}5$

2. SCHRITT: INTERPRETATION

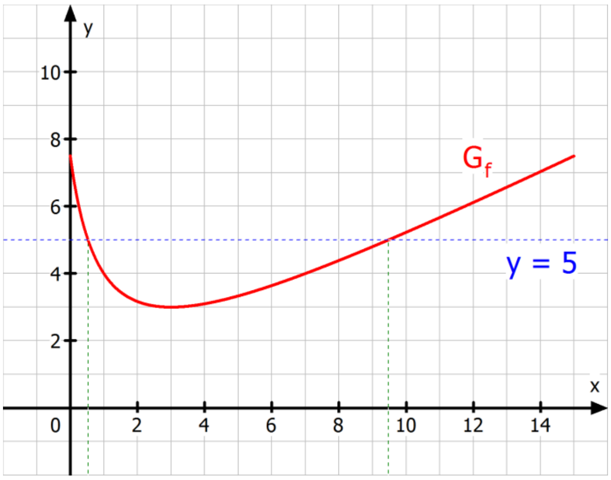
Für $x = 0$ ist die Dose leer und für $x = 15$ ist sie voll. In beiden Fällen liegt der Schwerpunkt in der Mitte der Dose, d. h. auf der halben Höhe der Dose, nämlich bei $\frac{1}{2} \cdot 15 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$. Dies stimmt mit dem Ergebnis aus dem 1. Schritt überein.

b)

Zunächst ist der Schwerpunkt in der Dosenmitte. Die einlaufende Flüssigkeit sorgt dafür, dass sich der Schwerpunkt zuerst schnell und dann immer langsamer nach unten verlagert, bis er schließlich die Flüssigkeitsoberfläche erreicht (bei einer Füllhöhe von 3 cm). Dies entspricht dem Tiefpunkt von G_f bei $(3|3)$. Wird jetzt weiter Flüssigkeit eingefüllt, kommt Masse oberhalb des Schwerpunktes hinzu, der Schwerpunkt steigt also mit der Füllhöhe, bis die Dose voll ist und sich der Schwerpunkt wieder auf halber Höhe der Dose befindet.

c)

1. SCHRITT: SKIZZE VON G_f UND DER GERADEN $y = 5$ ANFERTIGEN



2. SCHRITT: x-KOORDINATEN DER SCHNITTPUNKTE ABLESEN

G_f schneidet die Gerade $y = 5$ in zwei Punkten, nämlich etwa bei $x = 0{,}5$ und etwa bei $x = 9{,}5$. Zwischen diesen Schnittstellen verläuft G_f unterhalb der Geraden.
Der Schwerpunkt liegt also für Füllhöhen zwischen ungefähr 0,5 cm und 9,5 cm höchstens 5 cm hoch.

3. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN

Eigentlich müsste eine Ungleichung gelöst werden, aber da die Lage des Intervalls schon bekannt ist, genügt es, die folgende Gleichung zu lösen:

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = 5$	$\vert + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x + \frac{8}{x+1} = 5{,}5$	$\vert \cdot (x+1)$
$\frac{1}{2}x(x+1) + 8 = 5{,}5(x+1)$	ausmultiplizieren
$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 8 = 5{,}5x + 5{,}5$	$\vert - 5{,}5x - 5{,}5$
$\frac{1}{2}x^2 - 5x + 2{,}5 = 0$	$\vert \cdot 2$
$x^2 - 10x + 5 = 0$	quadratische Lösungsformel benutzen
$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 5}}{2}$ $= 5 \pm \sqrt{20}$	Lösungen notieren
$x = 5 - \sqrt{20} \approx 0{,}53$ oder $x = 5 + \sqrt{20} \approx 9{,}47$	

Der Schwerpunkt liegt genau dann höchstens 5 cm hoch, wenn die Füllhöhe zwischen $5-\sqrt{20}$ cm und $5+\sqrt{20}$ cm liegt.