Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis I

Bayern 2013

Teil 1

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: DEFINITIONSMENGE BESTIMMEN

Der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden.

Es muss also gelten:

$$3x + 9 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq -3$$

2. SCHRITT: NULLSTELLEN

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+9} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -3$$

b)

1. SCHRITT: BERECHNUNG DER ABLEITUNG g'

$$g(x) = (3x+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(3x+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}$$

2. SCHRITT: BERECHNUNG DER STEIGUNG

$$m = g'(0) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 0 + 9}} = \frac{1}{2}$$

3. SCHRITT: BESTIMMUNG DES y-ACHSENABSCHNITTS

Einsetzen von $m = \frac{1}{2}$ und $P(0|3)$ in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ liefert

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + t$$

$$\Rightarrow t = 3$$

Die Tangentengleichung lautet also:

$y = \frac{1}{2} \cdot x + 3.$

Aufgabe 2

a)

1. SCHRITT: FUNKTIONSTYP SUCHEN

Die gesuchte Funktion hat einen Wertebereich, der nach unten begrenzt und nach oben unbegrenzt ist. Dafür bietet sich eine nach oben geöffnete Parabel an, die durch eine quadratische Funktion gegeben ist. Die einfachste quadratische Funktion ist $x \longmapsto x^2$.

2. SCHRITT: FUNKTION ANPASSEN

Die Funktion $x \longmapsto x^2$ hat die Wertemenge $[0; \infty[$. Die Funktion muss also noch um 2 Einheiten nach oben verschoben werden. Eine Lösung lautet daher

$x \longmapsto x^2 + 2.$

b)

1. SCHRITT: FUNKTIONSTYP SUCHEN

Der vorgegebene Wertebereich ist nach oben und unten beschränkt und symmetrisch um die x-Achse, wie im Fall der Sinusfunktion.

5. SCHRITT: FUNKTION ANPASSEN

Die Funktion $x \longmapsto \sin(x)$ hat die Wertemenge $[-1; 1]$. Streckung um den Faktor 2 liefert eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft:

$x \longmapsto 2\sin(x).$

Aufgabe 3

1. SCHRITT: 1. FAKTOR = 0

$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

2. SCHRITT: 2. FAKTOR = 0

$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \approx 0{,}69$

3. SCHRITT: 3. FAKTOR = 0

$$\frac{1}{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Alle drei Lösungen sind ≥ 0. Das heißt, die Gleichung hat die Lösungsmenge

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3}; \ln 2\,; e\right\}.$

Aufgabe 4

1. SCHRITT: MONOTONIEVERHALTEN VON F BESTIMMEN

Die Steigung von F ist durch f gegeben und der Verlauf von f lässt sich näherungsweise der Graphik entnehmen:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2{,}3[$	$2{,}3$	$]2{,}3;\infty[$
$f(x)$	>0	0	<0	0	>0
Steigung von F	↗	—	↘	—	↗

F hat also bei ca. $x = 0$ einen Hochpunkt und bei ca. $x = 2{,}3$ einen Tiefpunkt.

2. SCHRITT: NULLSTELLEN VON F BESTIMMEN

Die Untergrenze der Integralfunktion ist 1, also hat F bei $x = 1$ eine Nullstelle. Außerdem hat eine Integralfunktion immer an den Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ Nullstellen, wo zwischen 1 und x_0 die Flächenbilanz zwischen G_f und der x-Achse ausgeglichen ist, d. h. wenn genau die Hälfte der Fläche im Bereich zwischen 1 und x_0 oberhalb der x-Achse liegt.

Zwischen $x = 1$ und $x = 2{,}3$ liegt eine Fläche von ca. 1,3 FE unterhalb der x-Achse, die ungefähr von der Fläche zwischen $x = 2{,}3$ und $x = 2{,}8$ oberhalb der x-Achse ausgeglichen wird. Somit liegt eine weitere Nullstelle von F bei etwa $x = 2{,}8$.

Zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegt eine Fläche von etwa 0,5 FE unterhalb der x-Achse, die durch die Fläche zwischen $x = -1{,}2$ und $x = 0$ oberhalb der x-Achse ungefähr ausgeglichen wird. Somit liegt bei ca. $x = -1{,}2$ eine weitere Nullstelle von F.

3.SCHRITT: FUNKTIONSWERT F(0) ERMITTELN

Wie oben bemerkt liegt zwischen $x = 0$ und $x = 1$ eine Fläche von etwa 0,5 FE unterhalb der x-Achse, d. h.

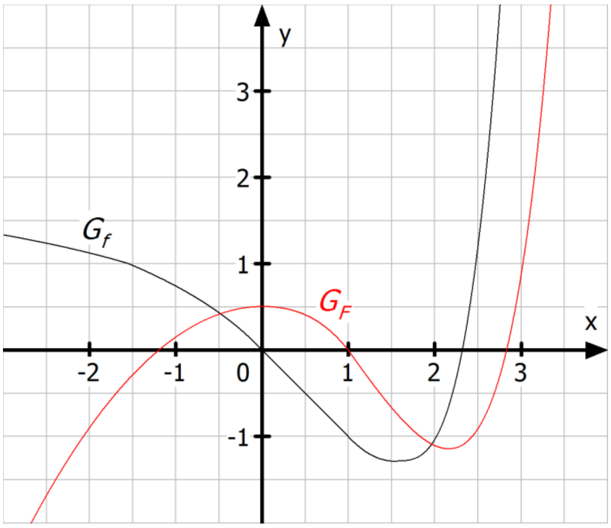
$$\int_0^1 f(t)dt \approx -0{,}5.$$

Also folgt

$$F(0) = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(t)dt \approx -(-0{,}5) = 0{,}5.$$

4. SCHRITT: SKIZZIERE DEN GRAPHEN

Der Graph von F hat nach den obigen Ausführungen ungefähr die Gestalt der folgenden roten Kurve:



Teil 2

Aufgabe 1

a)

1. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR PUNKTSYMMETRIE

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann punktsymmetrisch um den Ursprung, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

2. SCHRITT: RECHNERISCHER NACHWEIS

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \cdot (-x) \cdot e^{-0,5 \cdot (-x)^2} \\ &= -2 \cdot x \cdot e^{-0,5x^2} = -f(x) \end{aligned}$$

3. SCHRITT: GRENZWERT FÜR $x \longrightarrow \infty$ PLAUSIBEL MACHEN

Es ist

$$f(x) = \frac{2x}{e^{0,5x^2}},$$

wobei für $x \longrightarrow \infty$ der Zähler linear und der Nenner exponentiell gegen Unendlich strebt. Somit dominiert das Verhalten des Nenners und es gilt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{0,5x^2}} = 0.$$

b)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BERECHNEN

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-0,5x^2}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f'(x) &= 2 \cdot e^{-0,5x^2} + 2 \cdot x \cdot e^{-0,5x^2} \cdot (-x) \\ &= 2 \cdot e^{-0,5x^2} - 2 \cdot x^2 \cdot e^{-0,5x^2} \\ &= 2 \cdot e^{-0,5x^2}(1 - x^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 2e^{-0,5x^2} \cdot (-x)(1-x^2) + 2e^{-0,5x^2} \cdot (-2x) \\
&= -2xe^{-0,5x^2}(1-x^2) - 4xe^{-0,5x^2} \\
&= -2xe^{-0,5x^2}(1-x^2+2) \\
&= -2xe^{-0,5x^2}(3-x^2) \\
&= 2xe^{-0,5x^2}(x^2-3)
\end{aligned}
$$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$$
\begin{aligned}
& 2e^{-0,5x^2}(1-x^2) \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow\ & 1-x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm 1
\end{aligned}
$$

3. SCHRITT: ART DER EXTREMPUNKTE MITTELS 2. ABLEITUNG BESTIMMEN

$f''(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-0,5x^2}(1^2 - 3) = -4e^{-0,5} < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt bei $x = 1$.

$f''(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-0,5x^2}((-1)^2 - 3) = 4e^{-0,5} > 0 \Longrightarrow$ Tiefpunkt bei $x = -1$.

4. schritt: Funktionswerte der Extrempunkte berechnen

$f(1) = 2e^{-0,5} = \frac{2}{e^{0,5}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \Longrightarrow$ Hochpunkt: $\left(1 \middle| \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$

$f(-1) = -\frac{2}{\sqrt{e}} \Longrightarrow$ Tiefpunkt: $\left(-1 \middle| -\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$

c)

1. SCHRITT: MITTLERE ÄNDERUNGSRATE

$$
\begin{aligned}
m_s &= \frac{f(0,5) - f(-0,5)}{0,5 - (-0,5)} \\
&= e^{-\frac{1}{8}} - \left(-e^{-\frac{1}{8}}\right) \\
&= 2e^{-\frac{1}{8}} \approx 1,765
\end{aligned}
$$

2. SCHRITT: LOKALE ÄNDERUNGSRATE AN DER STELLE $x = 0$

Die lokale Änderungsrate entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$:

$m_T = f'(0) = 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 0^2}(1 - 0^2) = 2.$

3. SCHRITT: PROZENTUALE ABWEICHUNG

absolute Abweichung:

$\Delta = m_T - m_S = 2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}}\right).$

Prozentuale Abweichung gemessen an m_T:

$$\frac{\Delta}{m_T} \cdot 100\,\% = \frac{2\left(1 - e^{-\frac{1}{8}}\right)}{2} \cdot 100\,\% = \left(1 - e^{-\frac{1}{8}}\right) \cdot 100\,\% \approx 11,75\,\%.$$

Die mittlere Änderungsrate weicht um ca. 11,75 % von der lokalen Änderungsrate ab.

d)

1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN VON A NACHWEISEN

Da G_f in der ganzen rechten Halbebene oberhalb der x-Achse verläuft, ist die genannte Fläche gegeben durch eine Integralfunktion von f.

Die Funktion $A: (0; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist somit eindeutig festgelegt durch die folgenden Eigenschaften:

1. A ist eine Stammfunktion von f.
2. $\lim\limits_{x \searrow 0} A(u) = 0$.

Prüfen der 1. Eigenschaft:

$$A'(u) = \left(2 - 2e^{-0{,}5u^2}\right)' = -2e^{-0{,}5u^2} \cdot (-u) = 2ue^{-0{,}5u^2} = f(u).$$

Prüfen der 2. Eigenschaft:

$$\lim_{x \searrow 0} A(u) = 2 - 2e^{-0{,}5 \cdot 0^2} = 2 - 2 = 0.$$

Somit gibt $A(u)$ genau den Flächeninhalt zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $0 < x \leq u$ an.

2. SCHRITT: GRENZWERT BERECHNEN

$$\lim_{u \to \infty} 2 - 2e^{-0{,}5u^2} = 2 - \lim_{u \to \infty} \frac{2}{e^{0{,}5u^2}} = 2 - 0 = 2.$$

Die sich Fläche bis ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen G_f und der x-Achse in der rechten Halbebene hat einen endlichen Flächeninhalt, nämlich 2 FE.

e)

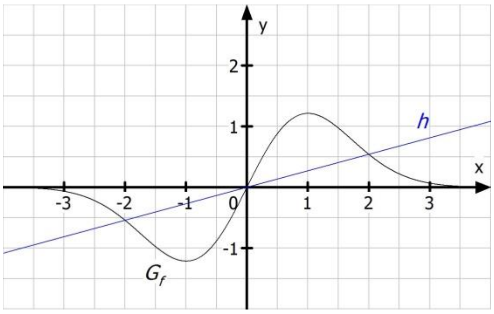
1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE BERECHNEN

$2xe^{-0{,}5x^2} = \frac{2}{e^2}x$	$\mid -\frac{2}{e^2}x$
$2xe^{-0{,}5x^2} - \frac{2}{e^2}x = 0$	$\mid x$ ausklammern
$\left(2e^{-0{,}5x^2} - \frac{2}{e^2}\right)x = 0$	$x = 0$ vormerken
$2e^{-0{,}5x^2} - \frac{2}{e^2} = 0$	$\mid + \frac{2}{e^2}$
$2e^{-0{,}5x^2} = \frac{2}{e^2}$	$\mid : 2$
$e^{-0{,}5x^2} = e^{-2}$	logarithmieren
$-0{,}5x^2 = -2$	$\mid : (-0{,}5)$
$x^2 = 4$	Wurzel ziehen

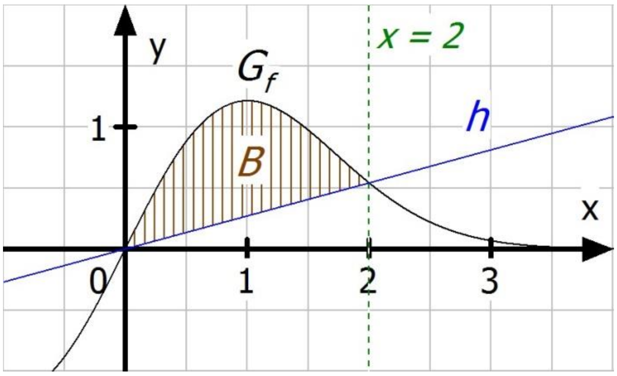
$x = \pm 2$

Die Schnittstellen lauten $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$.

2. SCHRITT: GERADE EINZEICHNEN



3. SCHRITT: SKIZZE DER FLÄCHE B



4. SCHRITT: BERECHNEN DER FLÄCHE B

Die Fläche B und die Dreiecksfläche zwischen h, der x-Achse und der Grenzlinie $x = 2$ ergänzen sich zur Fläche $A(2)$ zwischen G_f und der x-Achse in Bereich $0 < x \leq 2$.

Die Dreiecksfläche hat die Länge 2 und die Höhe $\frac{2}{e^2} \cdot 2 = \frac{4}{e^2}$ ($x = 2$ in die Gleichung von h einsetzen), also den Flächeninhalt

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2} \text{ [FE]}.$$

Somit ist

$$B = A(2) - A_D = 2 - 2e^{-0{,}5 \cdot 2^2} - \frac{4}{e^2} = 2 - \frac{6}{e^2} \approx 1{,}188.$$

Aufgabe 2

a)

Der Graph G_{g_c} entsteht aus G_f durch Verschiebung um c Einheiten nach oben (in positive y-Richtung). Der Hochpunkt $\left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ von G_f wird dabei zum Hochpunkt $\left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}+c\right)$ von G_{g_c}.

Dementsprechend ist wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (siehe Aufgabe 1a)

$\lim\limits_{x\to\infty} g_c(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + c = 0 + c = c.$

b)

1. SCHRITT: KEINE NULLSTELLE

Die Funktion g_c hat keine Nullstelle, wenn der Hochpunkt $\left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}+c\right)$ unterhalb der x-Achse liegt, d. h. wenn $\frac{2}{\sqrt{e}} + c < 0$ ist. Für $c = -1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$ hat also g_c z. B. keine Nullstellen.

2. SCHRITT: GENAU EINE NULLSTELLE

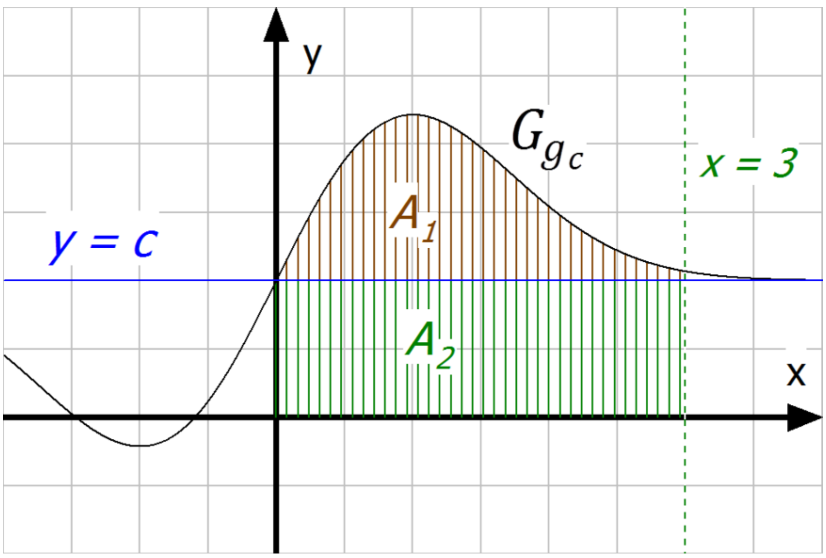
Für $c = 0$ ist $g_c = f$ und f hat genau eine Nullstelle, denn der zweite Faktor $e^{-0{,}5x^2}$ wird nie null.

3. SCHRITT: GENAU ZWEI NULLSTELLEN

Für $c = 1$ hat g_c genau zwei Nullstellen (in der linken Halbebene).

c)

1. SCHRITT: SKIZZE



2. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Die Fläche unter g_c setzt sich aus den Teilflächen A_1 und A_2 zusammen. Dabei entsteht die braun schraffierte Fläche A_1 aus der Fläche zwischen G_f und der x-Achse durch Verschiebung um c Einheiten nach oben. Somit ist

$$A_1 = \int_0^3 f(x)dx,$$

also der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung, die es zu zeigen gilt.

A_2 ist das grün schraffierte Rechteck der Länge 3 und der Höhe c, hat also den Flächeninhalt $3 \cdot c$. Die Fläche zwischen dem Graphen G_{g_c} und der x-Achse ist die gesamte schraffierte Fläche A, die durch das Integral auf der linken Seite dargestellt wird. Die Gleichung besagt also $A = A_1 + A_2$, was geometrisch einleuchtet.

Aufgabe 3

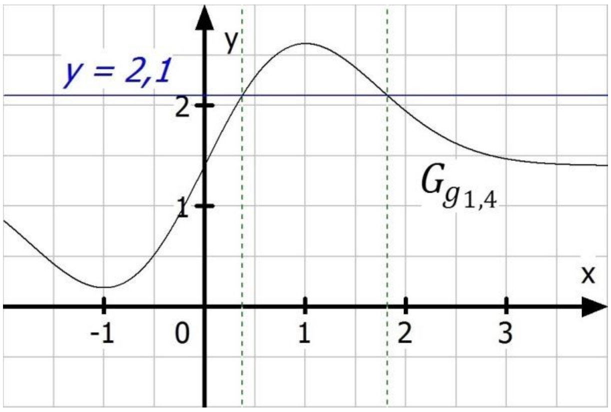
a)

1. SCHRITT: UNGLEICHUNG VISUALISIEREN

Die Ungleichung

$$2xe^{-0,5x^2} + 1,4 \geq 2,1$$

stellt die Bedingung, dass der Graph von $g_{1,4}$ oberhalb der Geraden $y = 2,1$ liegt. Diese Bedingung ist zwischen den grün gestrichelten Linien erfüllt:



2. SCHRITT: GÜLTIGKEITSBEREICH DER UNGLEICHUNG ABLESEN

Die Schnittpunkte von $G_{g_{1,4}}$ mit der Geraden $y = 2,1$ liegen etwa bei $x = 0,4$ und $x = 1,8$.

3. SCHRITT: x-WERTE DER SCHNITTPUNKTE IN JAHRE UMRECHNEN

Da eine Längeneinheit 10 Jahre darstellt haben wir in Schritt 2 den Zeitraum von 4 bis 18 Jahren nach 1955 ermittelt. Also betrug die Geburtenziffer ungefähr von 1959 bis 1973 mindestens 2,1.

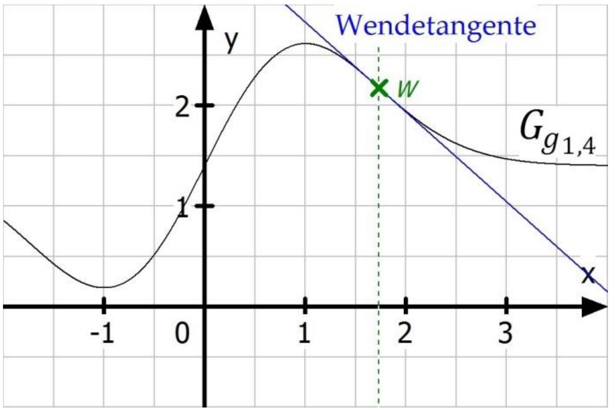
b)

Die künftige Entwicklung (ab 2013 = 1955 + 58) wird beschrieben durch die Funktion $g_{1,4}$ im Bereich $x \geq 5{,}8$. Sie fällt streng monoton und nähert sich dem Wert 1,4. Somit bleibt die Geburtenziffer laut Modell dauerhaft deutlich unter 2,1 und es ist zu erwarten, dass die Bevölkerungszahl schrumpft.

c)

1. SCHRITT: WENDESTELLE BESTIMMEN

Die Geburtenziffer nimmt dort am stärksten ab, wo der Graph im 1. Quadranten am steilsten abfällt. Diese Stelle lässt sich graphisch näherungsweise ermitteln, indem man die entsprechende Wendetangente einzeichnet:



Der Wert $x_W \approx 1{,}7$ entspricht ungefähr dem Jahr $1955 + 17 = 1972$.

2. SCHRITT:NACHWEIS DER SCHWÄCHER WERDENDEN ABNAHME

Die Geburtenziffer nimmt dann am stärksten ab, wenn $g'_{1,4}$ ein negatives Minimum annimmt. Eine notwendige Bedingung hierfür ist $g''_{1,4}(x) = 0$, wobei $g''_{1,4}(x) = f''(x) = 2xe^{-0,5x^2}(x^2 - 3)$ nach Aufgabe 1a). Nach obigen Überlegungen kommt nur die Stelle $x = \sqrt{3}$ in Betracht. Man kann nachrechnen, dass für $x > \sqrt{3}$ stets $g''_{1,4}(x) > 0$ gilt. Somit steigt $g'_{1,4}$ im Bereich $x > \sqrt{3}$ monoton (bleibt aber negativ, denn es ist $g'_{1,4}(x) = f'(x)$ $= 2e^{-0,5x^2} \cdot (1 - x^2) < 0$ für $x > 1$, siehe Aufgabe 1b). Somit fällt der Graph von $g_{1,4}$ immer weniger steil, d. h. die Geburtenziffer nimmt immer langsamer ab.