Abitur Mathematik: Musterlösung

Pflichtteil

Baden-Württemberg 2013

Aufgabe 1

1. SCHRITT: STRUKTUR DER FUNKTION BESCHREIBEN

Der Funktionsterm von f ist das Produkt einer ganzrationalen Funktion $u(x) = 2x^2 + 5x$ und einer Verkettung $v(x) = e^{-2x} = g(h(x))$ mit $g(x) = e^x$ und $h(x) = -2x$.

2. SCHRITT: RECHENREGELN ANWENDEN

Da die Teilfunktionen u und v miteinander multipliziert werden, wird die Produktregel benötigt.

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Dabei kann $u'(x)$ mit der Potenzregel (unter Benutzung der Linearität des Integrals) bestimmt werden:

Potenzregel: $u(x) = x^n \Longrightarrow u'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit $n = 2$ bzw. $n = 1$
$\Longrightarrow u'(x) = 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 5 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 4x + 5$.

Die Funktion v ist eine Verkettung, so dass die Kettenregel gebraucht wird.

Kettenregel: $v(x) = g\big(h(x)\big) \Longrightarrow v'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$ mit $g(x) = e^x$ und $h(x) = -2x \Longrightarrow v'(x) = e^{2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$.

Einsetzen von $u'(x)$ und $v'(x)$ in die grüne Formel liefert

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x+5) \cdot e^{-2x} + (2x^2+5x) \cdot (-2e^{-2x}) \\ &= e^{2x}\big(4x + 5 - 2(2x^2 + 5x)\big) \\ &= e^{2x}(-4x^2 - 6x + 5). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

1. SCHRITT: VERSCHACHTELUNGSTYP ERKENNEN

Die gesuchte Stammfunktion ergibt sich aus dem unbestimmten Integral $\int 4\sin(2x)\,dx$.

Der Integrand $4\sin(2x)$ ist bis auf den konstanten Faktor 4 eine Verkettung aus der Sinusfunktion und der linearen Funktion $x \longmapsto 2x$.

2. SCHRITT: INTEGRATIONSREGELN ANWENDEN

Eine Stammfunktion von $x \longmapsto \sin x$ ist gegeben durch $x \longmapsto -\cos x$. Nach der Regel der linearen Substitution ist dann durch $x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot (-\cos(2x)) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ eine Stammfunktion der Verkettung $x \longmapsto \sin(2x)$ gegeben. Mit Hilfe der Faktorregel kann noch der Faktor 4 berücksichtigt werden: Der bleibt bei der Integration erhalten. Daher ist $G(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = -2\cos(2x)$ eine Stammfunktion von f.

3. SCHRITT: INTEGRATIONSKONSTANTE BERECHNEN

Je zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich um eine Konstante, d. h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = G(x) + C \forall x \in \mathbb{R}$. Aus der Bedingung $F(\pi) = 7$ folgt somit $G(\pi) + C = 7$, wobei $G(\pi) = -2\cos(2\pi) = -2\cos(0) = -2$ da die Kosinusfunktion 2π-periodisch ist und $\cos(0) = 1$ erfüllt. Also ist $-2 + C = 7$, d. h. $C = 9$. Damit ist $F(x) = -2\cos(2x) + 9$.

Aufgabe 3

1. SCHRITT: GLEICHUNGSTYP ERKENNEN

Die Variable taucht nur als Argument der Exponentialfunktion auf, d. h. es handelt sich um eine Exponentialgleichung.

2. SCHRITT: DURCH SUBSTITUTION QUADRATISCHE GLEICHUNG BILDEN

Die erste Vereinfachung erfolgt durch Multiplikation beider Seiten mit e^x. Wegen $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ändert das nichts an der Lösungsmenge. Es ergibt sich

$2(e^x)^2 - 4 = 0.$

Durch die Substitution $u = e^x$ wird die Exponentialgleichung

$2(e^x)^2 - 4 = 0$

zur quadratischen Gleichung

$2u^2 - 4 = 0.$

3. SCHRITT: QUADRATISCHE GLEICHUNG LÖSEN

$2u^2 - 4 = 0 \qquad | + 4$

$2u^2 = 4 \qquad |: 2$

$u^2 = 2$

Somit ergeben sich die zwei Lösungen $u = -\sqrt{2}$ und $u = \sqrt{2}$.

4. SCHRITT: RÜCKSUBSTITUTION

Um die ursprüngliche Exponentialgleichung zu lösen, wird die Substitution $u = e^x$ wieder rückgängig gemacht. Durch Einsetzen der beiden Lösungen für u (also $u = -\sqrt{2}$ und $u = \sqrt{2}$) in diese Substitutionsgleichung ergeben sich die Lösungen für x:

$-\sqrt{2} = e^x$ hat keine reelle Lösung, da $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{2} = e^x$ hat die reelle Lösung $x = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$. Dies ist also die einzige reelle Lösung der vorgegebenen Exponentialgleichung.

Aufgabe 4

1. SCHRITT: SCHNITTSTELLEN BESTIMMEN

Die Begrenzung der Fläche nach links und rechts ergibt sich aus den Schnittstellen der beiden Funktionen f und g:

$f(x) = g(x)$ Funktionsterme einsetzen

$-x^2 + 3 = 2x$ $| -2x$

$-x^2 - 2x + 3 = 0$ Quadratische Lösungsformel

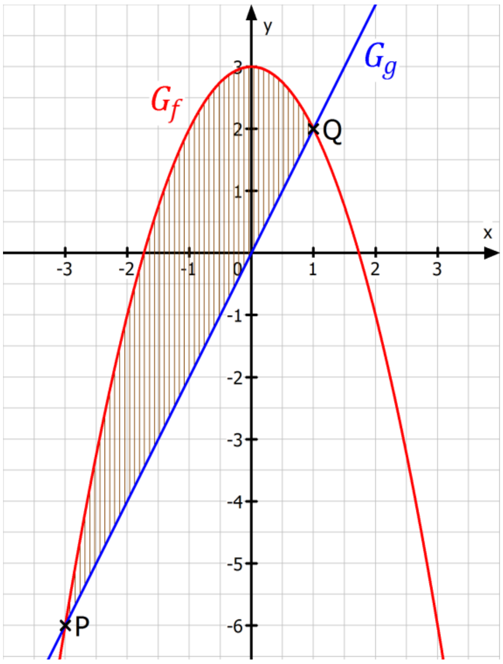
$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2}$ vereinfachen

$x = -1 \mp \dfrac{\sqrt{16}}{2} = -1 \mp 2$

Die Lösungen sind also $x = -3$ und $x = 1$.

2. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN

Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel und G_g ist eine Gerade, welche G_f bei $x = -3$ und bei $x = 1$ schneidet. Also sieht die Konstellation wie folgt aus:



NACHBAUEN MIT MATHEGRAFIX UND FLÄCHE SCHRAFFIEREN!!!

Die gesuchte Fläche ist schraffiert. Aus der Skizze geht hervor, dass G_f zwischen den Schnittstellen oberhalb von G_g verläuft.

3. SCHRITT: INTEGRAL AUFSTELLEN

Die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g ist gegeben durch das Integral

$$A = \int_{-3}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Der Integrand ist die Differenz aus der oberen und der unteren Funktion aus der Skizze, also $f(x) - g(x) = -x^2 + 3 - 2x$.

4. SCHRITT: STAMMFUNKTION BESTIMMEN UND FLÄCHE BERECHNEN

Aufgrund der Linearität des Integrals kann eine Stammfunktion des Integranden gliedweise bestimmt werden, gemäß der Regel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Damit erhält man für $-x^2 - 2x + 3$ die Stammfunktion $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist

$$\int_{-3}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)dx = [F(x)]_{-3}^{1}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}$$

$$= \frac{5}{3} - (-9)$$

$$= \frac{32}{3}\ [\text{FE}].$$

Die Fläche zwischen den beiden Graphen beträgt also $10\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten.

Aufgabe 5

1. SCHRITT: ERSTE BEDINGUNG BETRACHTEN

Der Funktionswert an der Stelle 2 ist 1, d. h., der Punkt $P(2|1)$ liegt auf dem Graphen von f.

2. SCHRITT: ZWEITE BEDINGUNG BETRACHTEN

Der Wert der Ableitung von f an der Stelle 2 ist 0, d. h., im Punkt $P(2|1)$ hat G_f eine waagrechte Tangente.

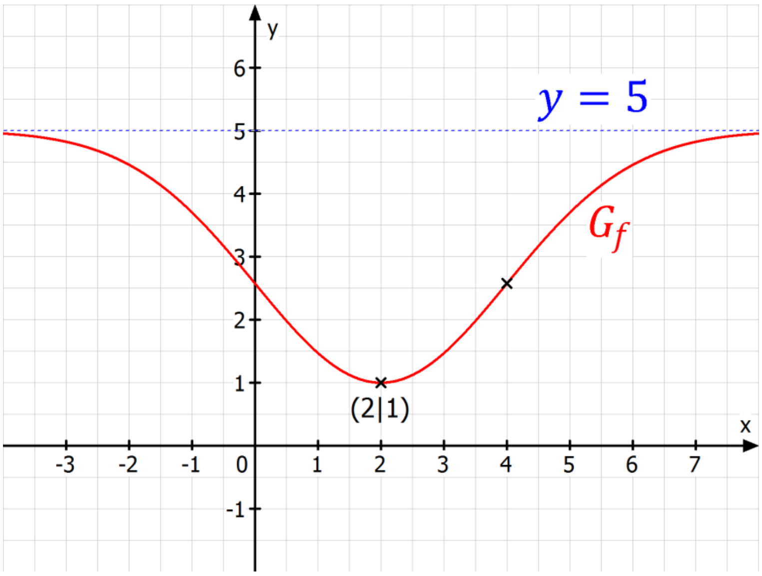
3. SCHRITT: DRITTE BEDINGUNG BETRACHTEN

Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle 4 ist 0. Der Wert der dritten Ableitung ist dort von 0 verschieden. Deshalb liegt an der Stelle 4 eine Wendestelle vor.

4. SCHRITT: VIERTE BEDINGUNG BETRACHTEN

Die Funktion f hat die waagrechte Asymptote $y = 5$, an die sich G_f für sehr große und sehr kleine x-Werte anschmiegt.

5. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN



Aufgabe 6

1. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG AUFSTELLEN

Stützvektor: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

2. SCHRITT: EBENENGLEICHUNG AUFSTELLEN

Da die Gerade g orthogonal zur Ebene E verläuft, kann der Richtungsvektor von g als Normalenvektor von E dienen. Mit dem Ortsvektor des Punktes C auf E ergibt sich die Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ausmultiplizieren des Skalarproduktes liefert die Ebenengleichung in Koordinatenform $E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$.

3. SCHRITT: SCHNITTPUNKT *S* BERECHNEN

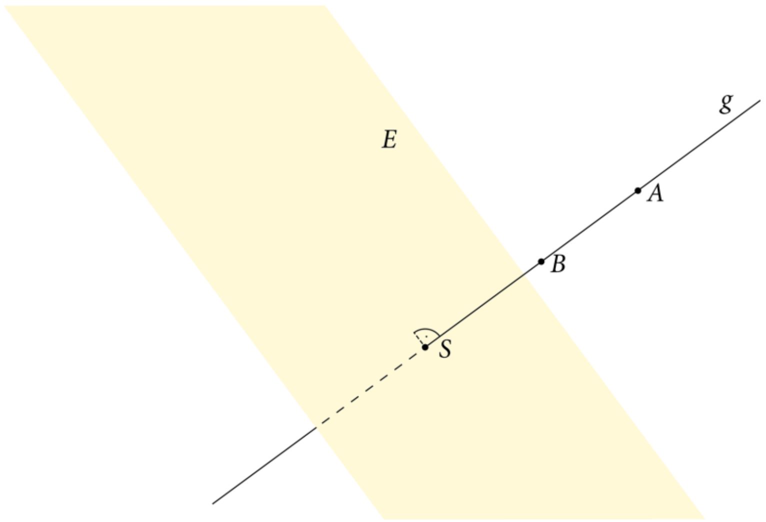
Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung liefert

$$\begin{aligned} & (1 + r) - 2(-1 - 2r) - 3(3 - 3r) = 22 \\ \Leftrightarrow\ & -6 + 14r = 22 \\ \Leftrightarrow\ & 14r = 28 \\ \Leftrightarrow\ & r = 2. \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Parameters in die Geradengleichung liefert die Koordinaten des Schnittpunkts $S(3|-5|-3)$.

4. SCHRITT: LAGE VON S BEZÜGLICH A UND B BESTIMMEN

Die Punkte A und B erhält man durch Einsetzen der Parameterwerte $r = 0$ und $r = 1$ in die Geradengleichung. Die Geradenpunkte zwischen A und B entsprechen den Parameterwerten zwischen 0 und 1, aber S entspricht dem Parameter $r = 2 \notin [0,1]$, also liegt S nicht zwischen A und B.



Aufgabe 7

1. SCHRITT: PARALLELITÄT NACHWEISEN

Aus der Koordinatengleichung von E_1 liest man unmittelbar den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Es gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - 6 + 4 = 0$, also steht der Normalenvektor von E_1 senkrecht auf beide Spannvektoren von E_2. Somit ist $\vec{n}$ auch ein Normalenvektor von E_2, d. h. E_1 und E_2 sind parallel.

2. SCHRITT: EBENENGLEICHUNG FÜR E_3 ANGEBEN

Da E_3 parallel zu E_1 ist, kann $\vec{n}$ als Normalenvektor von E_3 herangezogen werden. Um eine Gleichung in Normalenform zu bekommen, werden noch die Koordinaten eines Punktes M auf E_3 benötigt. Damit E_3 von E_1 und E_2 denselben Abstand hat, muss E_3 mittig zwischen E_1 und E_2 liegen. Somit wird die gesuchte Ebene von jeder Verbindungsstrecke AB zwischen einem Punkt A auf E_1 und einem Punkt B auf E_2 geschnitten, und zwar ist der Schnittpunkt immer der Mittelpunkt der

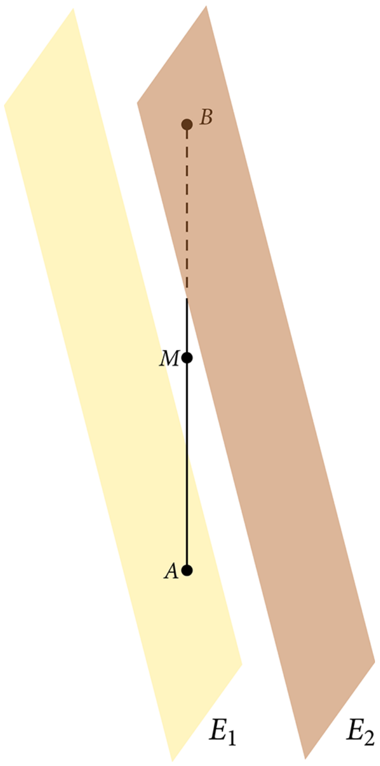
Verbindungsstrecke.

Wir wählen also $A \in E_1$ und $B \in E_2$ beliebig, z. B. $A(0|0|-1)$ als einfachste Lösung der Koordinatengleichung von E_1 und $B(7|7|5)$ als Aufpunkt der Parametergleichung von E_2. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke AB ist dann gegeben durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Punkt auf E_3 liefert zusammen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ die Normalenform

$$E_3\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Aufgabe 8

a)

1. SCHRITT: $P(\mathrm{A})$ BERECHNEN

Es wird davon ausgegangen, dass alle neun Spielkarten unterscheidbar sind und dass Peter die beiden Karten nacheinander aufdeckt.

Bemerkung:

Geht man davon aus, dass Peter die zwei Karten gleichzeitig aufdeckt, so hat man zwar eine andere Ereignismenge (nur noch 36 statt 72 Elementarereignisse), aber die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B sind die gleichen.

Das Ereignis A tritt ein, wenn zuerst eine der fünf Karten (von insgesamt 9) aufgedeckt wird, die keine Asse sind, und anschließend eine der verbleibenden vier (von insgesamt 8 noch verdeckten Karten), die keine Asse sind. Daher ist

$$P(\mathrm{A}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}.$$

2. SCHRITT: $P(\mathrm{B})$ BERECHNEN

Das Ereignis B tritt ein, wenn entweder zuerst eines der vier Asse (von insgesamt 9 Karten) und dann eine der zwei Damen (von insgesamt 8 noch verdeckten Karten) aufgedeckt wird, oder zuerst eine der zwei Damen und dann eines der vier Asse.

Da sich diese beiden Fälle gegenseitig ausschließen ist

$$P(\mathrm{B}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}.$$

b)

1. SCHRITT: WERTEBEREICH VON X BESTIMMEN

Das erste Ass erscheint frühestens als erste Karte ($\Longrightarrow X = 1$) und spätestens als sechste Karte ($\Longrightarrow X = 6$), denn wenn die fünf anderen Karten einmal aufgedeckt sind, so bleiben nur noch die vier Asse übrig, von denen eines als sechste Karte aufgedeckt werden muss.

Die Zufallsvariable X kann also die ganzzahligen Werte von 1 bis 6 annehmen.

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x \leq 2)$ BESTIMMEN

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ mit $P(X = 1) = \frac{4}{9}$ (Wahrscheinlichkeit, dass als ersten eine der vier Asse von insgesamt 9 Karten aufgedeckt wird) und $P(X = 2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ (Wahrscheinlichkeit, dass zuerst eine der fünf von insgesamt neun Karten aufgedeckt wird, die keine Asse sind und anschließend eine der vier Asse von insgesamt noch acht verbleibenden Karten).

Somit ist

$$P(X \leq 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$

Aufgabe 9

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Jede Wendestelle ist eine Nullstelle der zweiten Ableitung. Die Anzahl der Wendepunkte ist somit durch die Anzahl der Nullstellen der zweiten Ableitung beschränkt.

2. SCHRITT: FORMULIERUNG DER ANTWORT

Die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist eine ganzrationale Funktion zweiten Grades, also eine quadratische Funktion mit höchstens zwei Nullstellen. Daher kann die ursprüngliche Funktion höchstens zwei Wendestellen besitzen, d. h. der Graph kann unmöglich drei Wendepunkte haben.