Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Analysis A 2

Baden-Württemberg 2013

Aufgabe A 2.1

a)

1. SCHRITT: MAXIMALE ZUFLUSSRATE BESTIMMEN

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `10000×(e^(-0.5×X)-e^(-X))`.

Der Menüpunkt `DRAW` liefert eine Skizze von r. Im `G-Solv`-Menü liefert der Menüpunkt `MAX` eine Näherung für den Maximalwert, nämlich 2500.

2. SCHRITT: ZEITEN MIT $r(t) > 2000$ FINDEN

Eingabe von `2000` als zweiter Funktion im GTR und Anpassung der Graphik-Ansicht im `V-Window`-Menü (dort `Ymax=2500` setzen) zeigt, dass es zwischen $x = -6{,}3$ und $x = 6{,}3$ zwei Stellen gibt, zwischen denen die Werte von r oberhalb von 2000 liegen. Mit dem `ISCT`-Befehl im `G-Solv`-Menü findet man diese Stellen bei etwa $x = 0{,}647$ und $x = 2{,}572$.

Etwas mehr als 36 min nach Regenbeginn übersteigt die Zuflussrate erstmals 2000 Liter pro Stunde. Sie fällt erst gut zweieinhalb Stunden nach Regenbeginn wieder unter diesen Wert.

3. SCHRITT: ZEITPUNKT DER STÄRKSTEN ABNAHME DER ZUFLUSSRATE FINDEN

Gesucht ist das Minimum von r'. Eingabe im GTR: `Y3=d/dx(Y1)`.

Im `G-Solv`-Menü liefert der Menüpunkt `MIN` einen x-Wert von etwa 2,77. Die Zuflussrate nimmt also etwa $2\frac{3}{4}$ h nach Regenbeginn am stärksten ab.

b)

1. SCHRITT: WASSERMENGE NACH 3 STUNDEN BERECHNEN

Nachdem der Tank zu Beginn leer ist, ist die Füllmenge zum Zeitpunkt $t = 3$ gegeben durch

$$\int_0^3 r(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Im `G-Solv`-Menü kann mit dem ∫dx-Befehl unter Eingabe der Untergrenze 0 und der Obergrenze 3 der Wert des Integrals berechnet werden: man erhält 6035,27, d. h. es sind nach 3 Stunden etwas mehr als 6000 Liter im Tank.

2. SCHRITT: ZEITPUNKT MIT WASSERMENGE 5000 LITER BESTIMMEN

Eingabe im GTR: `Y4=fnInt(Y1,X,0,X)` und `Y5=5000`. Mit dem `ISCT`-Befehl im `G-Solv`-Menü findet man die Schnittstelle dieser Funktionen bei etwa $t = 2{,}46$. Nach knapp zweieinhalb Stunden befinden sich also 5000 Liter im Tank.

c)

1. SCHRITT: WASSERENTNAHME IN DEN ERSTEN ZWÖLF STUNDEN

Die beiden Funktionen r und w unterschieden sich um den konstanten Wert 400, d. h., es werden ab der vierten Stunde 400 Liter pro Stunde entnommen. In den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn wird also neun Stunden lang Wasser entnommen.

Entnommene Wassermenge: $9\ \mathrm{h} \cdot 400 \frac{\ell}{\mathrm{h}} = 3600\ \ell$.

2. SCHRITT: FALLENDER WASSERPEGEL

Der Wasserpegel im Tank fängt an zu sinken, wenn die Zuflussrate r unterhalb der Entnahmerate von 400 ℓ/h für die Bewässerung fällt. Um die Zeiten bis $t = 12$ erfassen zu können, muss im `V-Window`-Menü `Xmax=12` (oder größer) festgelegt werden. Der `X-CAL`-Befehl im `G-Solv`-Menü liefert dann $t_{\max} \approx 6{,}35$ für den Zeitpunkt, zudem der Wert 400 erstmals unterschritten wird. Nach gut $6\frac{1}{2}$ h nimmt der Wasserpegel im Tank wieder ab.

3. SCHRITT: MAXIMALE WASSERMENGE

Die maximale Wassermenge ist zum Zeitpunkt $t_{\max}$ im Tank, denn ab dann sink der Pegel wieder. Die Wassermenge im Tank setzt sich zusammen aus dem Zufluss während der ersten drei Stunden und dem Zu- und Abfluss bis zum Zeitpunkt $t_{\max}$:

$$V_{\max} = \int_0^3 r(t)\mathrm{d}t + \int_3^{t_{\max}} w(t)\mathrm{d}t.$$

Gibt man `Y6=Y1-400` im GTR ein, so liefert der ∫dx-Befehl im `G-Solv`-Menü unter Eingabe der Untergrenze 3 und der Obergrenze 6,35 den Wert

$\int_3^{t_{\max}} w(t)\mathrm{d}t \approx 1806{,}32$. Somit ergibt sich

$V_{\max} \approx 6035{,}27 + 1806{,}32 = 7841{,}59.$

Die maximale Wassermenge im Tank beträgt ca. 7842 ℓ.

Aufgabe A 2.2

1. SCHRITT: INTEGRAL AUFSTELLEN UND STAMMFUNKTION SUCHEN

Die Funktion f hat an den Rändern ihres Definitionsbereichs (bei $x = 0$ und $x = 1$) Nullstellen und ist ansonsten positiv. Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse erstreckt sich daher von $x = 0$ bis $x = 1$ und liegt ganz oberhalb der x-Achse. Deswegen ist

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

mit $f(x) = \sin(\pi x)$. Eine Stammfunktion der Sinusfunktion ist durch $x \longmapsto -\cos(x)$ gegeben. Nach der Regel der linearen Substitution ist also $F(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(x)$ eine Stammfunktion von f.

2. SCHRITT: INTEGRATIONSGRENZEN IN STAMMFUNKTION EINSETZEN UND RECHNEN

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= [F(x)]_0^1 \\ &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{-1}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\,. \end{aligned}$$

3. SCHRITT: ANSATZ MIT ALLGEMEINER QUADRATISCHEN FUNKTION NOTIEREN

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades mit den angegebenen Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$ hat eine Funktionsgleichung der Form

$$g(x) = a \cdot (x-0) \cdot (x-1) = a(x^2 - x)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.

4. SCHRITT: FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN

Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse ist dann

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\& = \int_0^1 \left(a(x^2 - x)\right)\mathrm{d}x$$
$$= a\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (0 - 0)\right)$$
$$= -\frac{a}{6},$$

da $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von g ist. Diese Fläche unter G_g ist halb so groß wie die Fläche $A = \frac{2}{\pi}$, also gilt

$$-\frac{a}{6} = \frac{1}{\pi} \Longrightarrow a = -\frac{6}{\pi}.$$

Eingesetzt in die grüne Formel liefert das die Funktionsgleichung

$$g(x) = -\frac{6}{\pi}(x^2 - x).$$