Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil Geometrie/Stochastik B 2

Baden-Württemberg 2013

Aufgabe B 2.1

a)

1. SCHRITT: KOORDINATENGLEICHUNG VON S ANGEBEN

Der Abbildung entnimmt man die Koordinaten dreier Punkte auf S, nämlich $M_1(8|0|4)$, $M_2(4|0|8)$ und $F(8|8|8)$. Als Stützvektor der Ebene dient der Punkt M_1 und als Spannvektoren die Verbindungsvektoren

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{M_1F} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

So ergibt sich die Parametergleichung

$$S: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus der Bedingung, dass er senkrecht auf beide Spannvekoren sein muss:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Das liefert zwei Gleichungen:

$\mathrm{I}: -4n_1 + 4n_3 = 0$ und

$\mathrm{II}: 8n_2 + 4n_3 = 0.$

Aus II folgt $n_3 = -2n_2$. Eine Komponente ist aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ frei wählbar, also setzen wir $n_2 = 1$ und erhalten damit $n_3 = -2n_2 = -2$. Diesen Wert setzen wir in I ein und erhalten $-4n_1 + 4 \cdot (-2) = 0$, also $n_1 = -2$.

Somit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von S. Eine Koordinatenform lautet also

$S: -2x_1 + x_2 - 2x_3 = a$

für einen noch zu bestimmenden Parameter $a \in \mathbb{R}$. Der Punkt M_1 liegt auf S, also müssen die Koordinaten dieses Punktes die Gleichung erfüllen:

$$-2 \cdot 8 + 0 - 2 \cdot 4 = a \Leftrightarrow -24 = a.$$

Eine Koordinatengleichung für S ist daher gegeben durch

$$S: -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -24.$$

2. SCHRITT: GLEICHSCHENKLIGKEIT NACHWEISEN

Anhand der Zeichnung vermutet man als gleichlange Schenkel M_1F und M_2F. Die Längen dieser Strecken sind

$$\left|\overrightarrow{M_1F}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} \text{ und}$$

$$\left|\overrightarrow{M_2F}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80}.$$

Somit sind zwei der drei Seiten des Dreiecks M_1M_2F gleich lang, d. h. es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

3. SCHRITT: FLÄCHENINHALT BESTIMMEN

Da die Seiten M_1F und M_2F gleich lang sind, ist die zur Grundseite M_1M_2 gehörige Höhe des Dreiecks die Verbindungsstrecke von F zum Mittelpunkt M der Grundseite. Dessen Ortsvektor ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}12\\0\\12\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Länge der Grundseite ist

$$g = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+4^2} = \sqrt{32}$$

und die Höhe ist

$$h = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+8^2+2^2} = \sqrt{72}.$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt somit

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{32} \cdot \sqrt{72} \\ &= \sqrt{8} \cdot \sqrt{72} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{18} \\ &= 4\sqrt{36} \\ &= 24\ [\text{FE}]. \end{aligned}$$

Das Segeltuch hat somit einen Flächeninhalt von 24 m².

4. SCHRITT: ABSTAND VON *S* ZU *E* BESTIMMEN

Die Hessesche Normalenform von S entsteht aus der Koordinatengleichung, indem man durch den Betrag des zugehörigen Normalenvektors teilt, also hier:

$$S: \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0.$$

Der Abstand dieser Ebene zum Punkt E ergibt sich dann durch Einsetzen der Koordinaten von E in den Betrag der linken Seite dieser Gleichung:

$$d(S,E) = \left|\frac{2 \cdot 8 - 0 + 2 \cdot 8 - 24}{3}\right| = \frac{8}{3}.$$

Das Segeltuch hat also einen Abstand von etwa 2,7 LE von der Ecke E.

b)

1. SCHRITT: UNTERES ENDE DER STANGE BESTIMMEN

Sei E_U das untere Ende der Stange. Da E_U auf der Strecke AC liegt, hat E_U die Koordinaten $E_U(t|8-t|0)$ für einen noch zu bestimmenden Parameter $t \in [0;8]$. Das obere Ende E_O liegt 6 LE oberhalb von E_U, hat also die Koordinaten $E_O(t|8-t|6)$.

E_O liegt in der Ebene S, also erfüllen die Koordinaten von E_O die Gleichung der Ebene:

$$2 \cdot t - (8-t) + 2 \cdot 6 - 24 = 0 \Leftrightarrow 3t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{20}{3}.$$

Damit ist $E_U\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|0\right)$.

Aufgabe B 2.2

a)

1. SCHRITT: NACHWEIS FAIRES SPIEL

Zu zeigen ist, dass der Erwartungswert der Auszahlung X in Euro dem Einsatz entspricht. Die möglichen Auszahlungen erfolgen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Die Auszahlung von 2 € erfolgt nur bei einer der 36 möglichen Felderkombinationen, hat also eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$.

Die Auszahlung von 0,85 € erfolgt, wenn beide Räder an einem der 2 Diamanten von insgesamt 6 Feldern stehen bleiben. Diese Auszahlung hat also eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$.

Die Auszahlung von 0,20 € erfolgt, wenn beide Räder an einem der 3 Kleeblatt-Feldern von insgesamt 6 Feldern stehen bleiben. Diese Auszahlung hat also eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$.

Insgesamt erfolgt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$ eine Auszahlung, d. h. mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{13}{36} = \frac{23}{36}$ keine Auszahlung.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Auszahlung in Euro nach einem Spiel.

Der Erwartungswert von X ist

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 0{,}85 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = 0{,}2.$$

Es ist also im Schnitt eine Auszahlung von 0,20 € zu erwarten, was genau dem Einsatz entspricht. Deshalb ist das Spiel fair.

2. SCHRITT: NEUEN AUSZAHLUNGSBETRAG BESTIMMEN

Der neue Auszahlungsbetrag sei a. Der Erwartungswert von X ist jetzt

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot a + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2 = \frac{1{,}9 + 2a}{18}.$$

Damit der Veranstalter im Schnitt 0,05 € pro Spiel Gewinn macht, müssen nach Abzug der durchschnittlichen Auszahlung an die Spieler vom Einsatz noch 0,05 € übrig bleiben, d. h. es muss $0{,}2 - E(X) = 0{,}05$ sein.

Somit gilt

$$\begin{aligned} & 0{,}2 - \frac{1{,}9 + 2a}{18} = 0{,}05 \\ \Leftrightarrow\ & 3{,}6 - (1{,}9 + 2a) = 0{,}9 \\ \Leftrightarrow\ & 2a = 3{,}6 - 1{,}9 - 0{,}9 = 0{,}8 \\ \Leftrightarrow\ & a = 0{,}4. \end{aligned}$$

Der neue Auszahlungsbetrag für die Kombination Diamant – Diamant beträgt 0,40 €.

b)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG BESTIMMEN

Die Zufallsvariable Y beschreibe, wie oft bei den 500 Spielen die Kombination Stern – Stern vorkommt. Y ist binomialverteilt mit Parametern $n = 500$ und p (unbekannt).

2. SCHRITT: TESTART BESTIMMEN

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit der Nullhypothese

$H_0: p \geq \frac{1}{36}$

3. SCHRITT: ABLEHNUNGSBEREICH ERMITTELN

Die Nullhypothese wird angenommen, wenn die Kombination Stern – Stern oft vorkommt. Der Annahmebereich hat daher die Form $\{g; g+1; \dots; 500\}$ für ein $g \in \mathbb{N}_0$.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 fälschlicherweise abgelehnt wird. Das ist also die Wahrscheinlichkeit, dass $Y < g$ ausfällt, obwohl $p \geq \frac{1}{36}$ ist. Am größten ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn $p = \frac{1}{36}$ ist. Selbst in diesem Grenzfall soll $P(Y < g) \leq 0{,}05$ gewährleistet sein. Gesucht ist das größte g, bei dem diese Ungleichung für $p = \frac{1}{36}$ noch erfüllt ist.

Die Ungleichung $P(Y < g) \leq 0{,}05$ ist äquivalent zu $P(Y \leq g-1) \leq 0{,}05$.

Gibt man im `STAT`-Modus des GTR die Liste

1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8

als `List1` ein und bedient sich der `Bcd`-Funktion vermittels der `BINM`-Option im `DIST`-Menü, so kann man die weiteren Daten

```
Data:       List
List:       List1
Numtrial:   500
p:          1÷36
Save Res:   None
```

eingeben und erhält aus Ausgabe die Liste

1	4.5E-4
2	1.7E-3
3	5.4E-3
4	0.0142
5	0.0318
6	0.0629

Der fünften und sechsten Zeile entnimmt man

$P(Y \leq 7) \approx 0{,}0318$ und $P(Y \leq 8) \approx 0{,}0629$.

Das größte $g \in \mathbb{N}_0$ mit $P(Y \leq g-1) \leq 0{,}05$ erfüllt somit $g - 1 = 7$, also $g = 8$.

Wenn mindestens achtmal die Kombination Stern – Stern erscheint, so wird die Nullhypothese angenommen, ansonsten wird sie abgelehnt.