Abitur Mathematik: Musterlösung

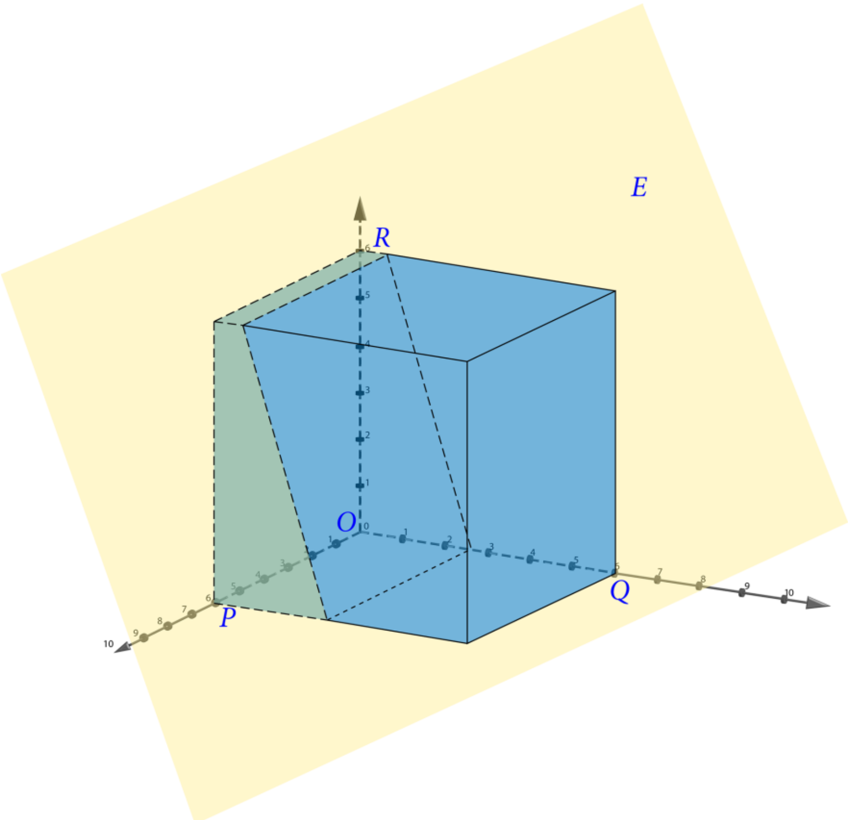
Wahlteil Geometrie/Stochastik B 1

Baden-Württemberg 2013

Aufgabe B 1.1

a)

1. SCHRITT: DARSTELLUNG IM KOORDINATENSYSTEM



2. SCHRITT: WINKELBERECHNUNG

Der gesuchte Winkel ist der Schnittwinkel zweier Ebenen. Dieser entspricht dem Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren. Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, wie man aus der

Koordinatengleichung abliest. Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Somit gilt für den Schnittwinkel α der zwei Ebenen

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha \approx 71{,}6\,°.$$

3. SCHRITT: ABSTANDSBESTIMMUNG

Der Abstand der Ebene E zur x_1-Achse ist der Abstand der Ebene zu jedem beliebigen Punkt aus dieser Achse, z. B. zum Ursprung O. Um diesen zu bestimmen wird E in Hesse'scher Normalform dargestellt:

$$E\colon \frac{3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0.$$

Der Abstand von O zu E ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten von O in den Betrag der linken Seite dieser Ebenengleichung:

$$d(O,E) = \left|\frac{3\cdot 0 + 0 - 8}{\sqrt{10}}\right| = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2{,}53.$$

Die Ebene E hat also etwa den Abstand 2,53 LE von der x_1-Achse.

b)

1. SCHRITT: GEGENSEITIGE LAGE DER EBENEN UNTERSUCHEN

Die Ebenen der Ebenenschar besitzen alle den gleichen Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, also sind sie parallel zueinander.

2. SCHRITT: PARAMETERWERT BESTIMMEN

Die Hesse'sche Normalform der Ebenen E_a lautet

$$E_a\colon \frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0.$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $S(6|6|6)$ in den Betrag der linken Seite liefert den Abstand von S zu E_a:

$$d(S,E_a) = \left|\frac{3\cdot 6 + 6 - a}{\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{24 - a}{\sqrt{10}}\right|.$$

Dieser Abstand soll $\sqrt{10}$ betragen, deshalb muss gelten:

$\left|\frac{24-a}{\sqrt{10}}\right| = \sqrt{10}$, also $|24 - a| = 10$. Somit ist $24 - a = \pm 10$, d. h. entweder $a = 14$ oder $a = 34$.

Demnach sind $a = 14$ und $a = 34$ die einzigen Parameter, für die der Abstand von S zu E_a $\sqrt{10}$ LE beträgt.

3. SCHRITT: GEMEINSAME PUNKTE MIT DEM WÜRFEL

Die Ebenen der Schar sind alle parallel zur x_1-Achse und damit parallel zu vier der 12 Kanten des Würfels. Aus der Koordinatendarstellung aus Teilaufgabe a) ist ersichtlich, dass die Ebene E_a genau dann den Würfel berührt bzw. durchdringt, wenn sie zwischen der x_1-Achse und der oberen rechten Kante des Würfels (von S nach $T(0|6|6)$) verläuft. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn E_a einen Punkt auf der Strecke OT enthält. Die Punkte auf dieser Strecke haben die Koordinaten $(0|t|t)$ mit $t \in [0{,}6]$.

Alle Ebenen der Schar sind parallel zueinander und zur x_1-Achse. Das Vorzeichen des Parameters a gibt an, auf welcher Seite von E_0 die Ebene E_a liegt: Für $a < 0$ liegt E_a links vom Würfel (berührt ihn also nicht). Für größer werdendes $a \geq 0$ wandert die Ebene nach rechts-oben (in Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$) und berührt bzw. durchdringt den Würfel so lange, bis sie die Ecke $S(6|6|6)$ erreicht (siehe Skizze bei Teilaufgabe a). Für größere Parameter hat E_a keinen Schnittpunkt mehr mit dem Würfel. Der Parameter, für den E_a den Punkt S enthält, ergibt sich aus der grünen Gleichung, denn dann ist der Abstand von S zu E_a null:

$$d(S, E_a) = \left|\frac{24-a}{\sqrt{10}}\right| = 0 \Leftrightarrow a = 24.$$

Somit haben genau die Ebenen E_a mit a aus $[0; 24]$ gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Aufgabe B 1.2

1. SCHRITT: WAHRSCHEINICHKEIT BERECHNEN

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Gewinnlose unter den gekauften Losen. Wegen fehlender Angaben zur Gesamtzahl der Lose gehen wir näherungsweise davon aus, dass X binomialverteilt ist. Bei jedem Loskauf ist in unserem Modell die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu bekommen, $p = 0{,}1$. Die Anzahl der gekauften Lose sei n.

Zunächst ist $n = 3$ und gefragt ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$. Da X nur ganzzahlige Werte zwischen 0 und 3 annehmen kann, ist

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3),$$

wobei nach der Bernoulliformel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ für ganzzahlige k zwischen 0 und n gilt. Somit ist

$$\begin{aligned} P(X=2)+P(X=3) &= \binom{3}{2}0{,}1^2\cdot 0{,}9^1+\binom{3}{3}0{,}1^3\cdot 0{,}9^0 \\ &= 3\cdot 0{,}01\cdot 0{,}9+0{,}001 \\ &= 0{,}028. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 3 gekauften Losen mindestens zwei Gewinnlose sind, beträgt im Modell 2,8 %.

2. SCHRITT: MINDESTANZAHL LOSE BESTIMMEN

Beim Kauf von n Losen ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens ein Gewinnlos ist, $P(X\geq 1)$. Die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Gegenereignisses ist

$$\begin{aligned} P(X\leq 1) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \binom{n}{0}0{,}1^0\cdot 0{,}9^n+\binom{n}{1}0{,}1^1\cdot 0{,}9^{n-1} \\ &= 0{,}9^n+0{,}1\cdot n\cdot 0{,}9^{n-1} \\ &= 0{,}9^n+\frac{1}{9}n\cdot 0{,}9^n \\ &= 0{,}9^n\cdot\left(1+\frac{n}{9}\right). \end{aligned}$$

Gesucht ist also das kleinste $n\in\mathbb{N}_0$, sodass $1-0{,}9^n\cdot\left(1+\frac{n}{9}\right)>0{,}5$ ist.

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `Y1=1-0.9^X×(1+X÷9)`.

Der `X-CAL`-Befehl im `G-Solv`-Menü liefert unter Eingabe des y-Wertes `0.5` den Schwellenwert von etwa `X=16.44`.

Die kleinste natürliche Zahl, welche die gewünschte Ungleichung erfüllt, ist also $n=17$.

Also muss man mindestens 17 Lose kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % mindestens zwei Gewinnlose zu erhalten.