NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Stochastik I

Bayern 2012

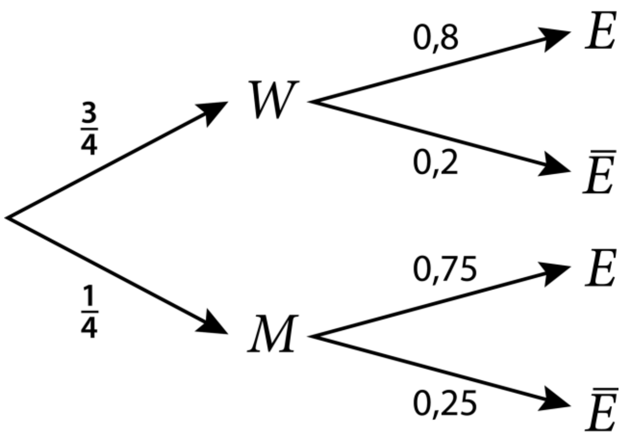
Aufgabe 1

BAUMDIAGRAMM

Bezeichnungen:

M = „männlich“, W = „weiblich“

E = „Durchschnitt 1,5 oder besser“, $\overline{E}$ = „Durchschnitt schlechter als 1,5“



$$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P(W \cap \overline{E}) + P(M \cap \overline{E}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}25 \\ &= \frac{3}{20} + \frac{1}{16} = \frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\%. \end{aligned}$$

ANTWORT: Der Anteil aller Bewerber mit einem Abiturdurchschnitt von schlechter als 1,5 beträgt 21,25 %.

NOTIZEN

Aufgabe 2

a)

WARUM DER TERM NICHT PASST

Das Casting entspricht 15-mal Ziehen ohne Zurücklegen (da keine Person mehrfach ausgewählt wird) aus zwei möglichen Ergebnissen (weiblich / männlich). Die Bernoulliformel $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ liefert die Wahrscheinlichkeit, bei 15-mal Ziehen mit Zurücklegen (jede Person kann mehrfach gezogen werden) aus 20 weiblichen und 10 männlichen Personen genau 5 mal eine männliche und 10 mal eine weibliche Person zu ziehen. Die Modellannahme für die Bernoulliformel ist eine immer gleich bleibenden Trefferwahrscheinlichkeit, die aber im vorliegenden Fall nicht gewährleistet ist.

b)

WAHRSCHEINLICHKEIT *p*

Es ergibt sich mit der Lottoformel folgende Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

$$= \frac{\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{30}{15}}$$

$$= \frac{184756 \cdot 252}{155117520} = \frac{1001}{3335} \approx 30{,}0\ \%.$$

Aufgabe 3

a)

ERGEBNISSE *EINES* WÜRFELS

Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen 0, 1 und 2:

$$P(\text{"0"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(\text{"1"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ P(\text{"2"}) = \frac{1}{6}$$

AUGENSUMME 2 VON ZWEI WÜRFELN

NOTIZ
EN

Die Augensumme von zwei Würfeln ergibt die Anzahl Mathematik-Fragen an den Kandidaten. Die beiden Würfe sind unabhängig voneinander.

$P(\text{"Augensumme 2"}) = P(\text{"0 + 2" oder "1 + 1" oder "2 + 0"})$

$= P(0) \cdot P(2) + P(1) \cdot P(1) + P(2) \cdot P(\text{"0"})$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{36} \approx 36{,}1\ \%$

ANTWORT: Der erste Kandidat bekommt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 36,1 % genau zwei Fragen aus dem Fachgebiet Mathematik.

b)

FEHLENDER WERT IN DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

$P(X = 3)$ erhält man durch Subtraktion der vier gegebenen Wahrscheinlichkeiten vom Summenwert 1:

$$P(X = 3) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{13}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{6}$$

ERWARTUNGSWERT

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{13}{36} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \approx 1{,}7.$$

Im Mittel muss ein Kandidat also ca. 1,7 Mathematik-Fragen beantworten.

c)

MATHEMATISCHES MODELL

Y soll die Zufallsvariable sein, die die Anzahl der Kandidaten mit 0 Mathematik-Fragen angibt.

$n = 10$ (Anzahl der Kandidaten)

Treffer = „0 Mathematik-Fragen“ (bei einem Kandidaten)

$p = P(\text{Treffer}) = P(X = 0) = \frac{1}{9}$ (für jeden Kandidaten gleich, s.o.)

WAHRSCHEINLICHKEIT DAFÜR, DASS DIE ANZAHL DER KANDIDATEN MIT 0 MATHEMATIK-FRAGEN 1 IST

$$P(Y = 1) = B\left(10; \frac{1}{9}; 1\right) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^9 = 0{,}384933 \approx 38{,}5\ \%.$$

NOTIZEN

ANTWORT: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 38,5 % bekommt genau einer der 10 Kandidaten keine Mathematik-Frage gestellt.

d)

LÖSUNGSANSATZ 3-MAL-MINDESTENS-AUFGABE

Mit Zufallsvariable Y aus $3c$)

$P(Y \geq 1) > 90\ \% = 0{,}9.$

UNGLEICHUNG LÖSEN

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$ in die Ungleichung einsetzen:

$1 - P(Y = 0) > 0{,}9 \quad | +P(Y = 0) - 0{,}9$

$0{,}1 > P(Y = 0)$

Dabei ist

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Die Ungleichung lautet damit:

$0{,}1 > \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad |\ \text{logarithmieren}$

$\ln(0{,}1) > \ln\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) \quad |\ \text{Logarithmusgesetz anwenden}$

$\ln(0{,}1) > n \cdot \ln\left(\frac{8}{9}\right) \quad \left|\ : \ln\left(\frac{8}{9}\right)\right.$

$\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} < n$ und damit

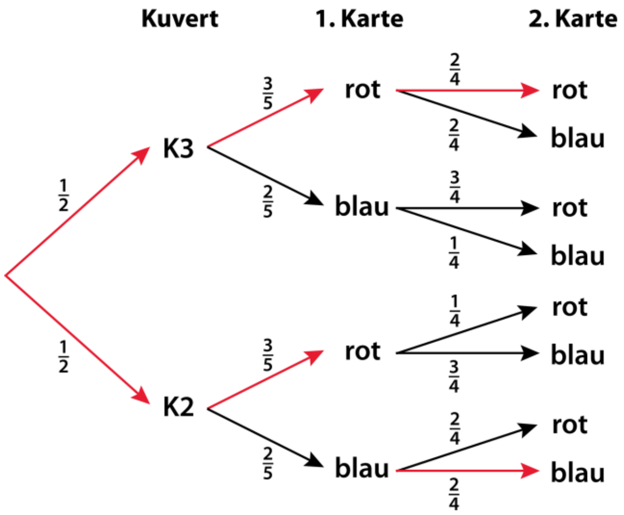
$$n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} \approx 19{,}55.$$

ANTWORT: Es müssen mindestens 20 Kandidaten teilnehmen.

NOTIZ
EN

e)

EINZEL-WAHRSCHEINLICHKEITEN UND BAUM



GEFRAGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$P(\text{"2 rote Karten"}) = P(\text{„K3} - \text{rot} - \text{rot“}) + P(\text{„K2} - \text{rot} - \text{rot“})$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Das entspricht dem angegebenen Ergebnis.□

f)

WAHRSCHEINLICHKEIT MIT VORBEDINGUNG

$$P(\text{rr} \cap \text{K3}) = \text{P}(\text{„K3} - \text{rot} - \text{rot“}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0{,}15.$$

Aus Teilaufgabe 3e): $P(rr) = P(\text{"2 rote Karten"}) = 0{,}2$.

bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{rr}(\text{K3}) = \frac{P(rr \cap \text{K3})}{P(rr)} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75 = 75\ \%.$$

ANTWORT: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % stammen die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten.