NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

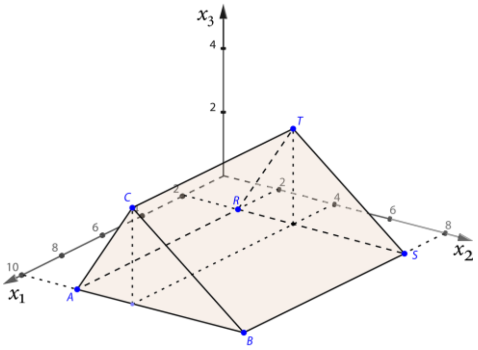
# Geometrie II

**Bayern 2012**

## Aufgabe 1

a)

### ZEICHNUNG




### LAGE DER GRUNDFLÄCHE *ABC*

Man kann anhand der gleichen $x_1$-Koordinate $10$ bei allen drei Punkten erkennen, dass die Grundfläche $ABC$ parallel zur $x_2$-$x_3$-Ebene liegt.

### FLÄCHENINHALT DER GRUNDFLÄCHE

Flächeninhalt der dreieckigen Grundfläche *ABC* ist

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot g_D \cdot h_D,$$

wobei $g_D$ die Grundseite und $h_D$ die zugehörige Höhe des Dreiecks ist. Wähle z. B. als Grundseite *AB*. Die Länge dieser Seite ist einfach die Differenz der $x_2$-Koordinaten von *A* und *B*, also $g_D = 8 - 2 = 6$. Die Höhe ist der Abstand des Punktes *C* von der $x_1$-$x_2$-Ebene, in der die Seite *AB* liegt. Diese Höhe ist also einfach die $x_3$-Koordinate von *C*, also $h_D = 3$. Somit ist $A_D = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9\ [\mathrm{FE}]$.

### VOLUMEN DES PRISMAS

Die Höhe des Prismas $h_P$ ist die Länge $|\overrightarrow{AR}| = 8\ [\mathrm{LE}]$, weil $\overrightarrow{AR}$ senkrecht auf der Grundfläche $ABC$ steht.

NOTIZEN

Das Volumen des Prismas ist Grundfläche mal Höhe, also

$V_P = A_D \cdot h_P = 9 \cdot 8 = 72$ [VE].

b)

### NORMALENVEKTOR

Die Ebene ist durch die drei Punkte $B, C$ und $S$ bestimmt, denn dies sind drei Ecken eines Rechtecks, liegen also nicht auf einer Geraden.

Normalenvektor:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_1} &= \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) \times \left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB}\right)\\ &= \left(\begin{pmatrix}10\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\-24\\-32\end{pmatrix}\end{aligned}$$

vereinfachter Normalenvektor: $\vec{n} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

### EBENENGLEICHUNG

Die Komponenten des Normalenvektors sind Koeffizienten einer Koordinatengleichung:

$E: 3x_2 + 4x_3 + c = 0$

Einsetzen von $B$ liefert

$3 \cdot 8 + 4 \cdot 0 + c = 0 \Longrightarrow c = -24$

$\Longrightarrow$ vollständige Ebenengleichung $E: 3x_2 + 4x_3 - 24 = 0$.

c)

### FORMEL UND PASSENDE VEKTOREN

Formel $\cos(\varphi) = \frac{\text{Skalarprodukt}}{\text{Längenprodukt}}$

Passende Vektoren dafür sind: $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$;

Längen: $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ und $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

NOTIZEN

Skalarprodukt: $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) = 1$

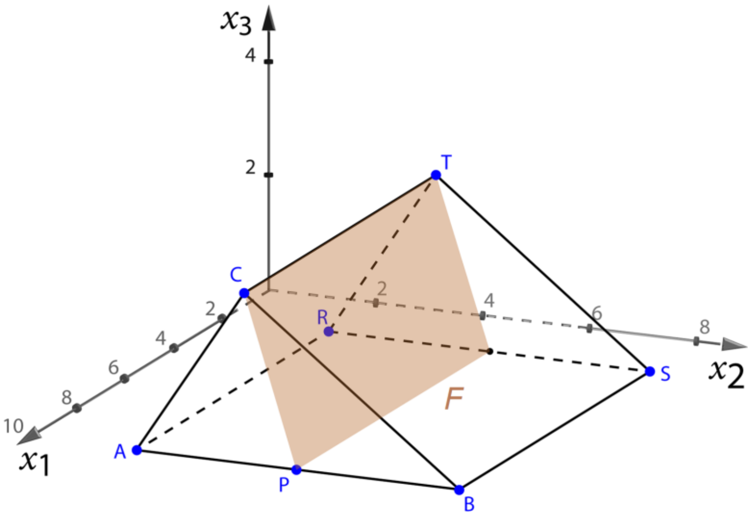
### GESUCHTER WINKEL

$$\varphi = \text{Winkel}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{13} \cdot 5}\right) \approx 86{,}8\,°.$$

Dies ist kleiner als 90 °, also ist $\varphi$ der gesuchte spitze Winkel.

d)

### GROBE SKIZZE



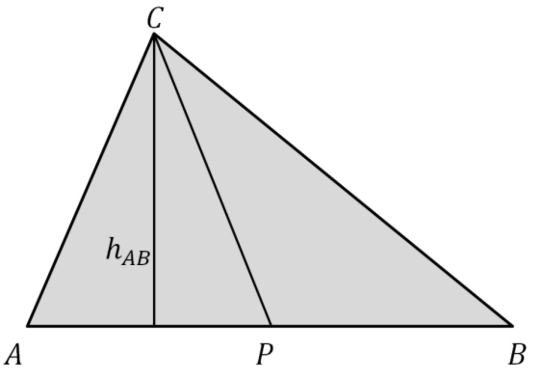

Die Ebene $F$ ist eindeutig durch ihren Schnittpunkt mit der Strecke $[AB]$ bestimmt. Dieser Schnittpunkt sei $P$. Die zwei Teilvolumina sind wiederum gerade dreiseitige Prismen.

$P$ muss so gewählt werden, dass die zwei Teilprismen dasselbe Volumen haben. Das Volumen eines Prismas ist das Produkt aus der Höhe und der Grundfläche. Die beiden Teilprismen haben aber dieselbe Höhe, nämlich $\left|\overrightarrow{CT}\right| = 8$ (Höhe des ursprünglichen Prismas), siehe Teilaufgabe a). Also sind die Volumina genau dann gleich, wenn die dreieckigen Grundflächen $APC$ und $PBC$ gleich groß sind.

### TEILUNGSPUNKT P IM DREIECK ABC FINDEN

Die Flächeninhalte der Dreiecke $APC$ und $PBC$ berechnen sich jeweils aus der horizontalen Seitenlänge ($\left|\overrightarrow{AP}\right|$ bzw. $\left|\overrightarrow{PB}\right|$) und der Höhe $h_{AB}$ des Punktes $C$ über der $x_1$-$x_2$-Ebene:

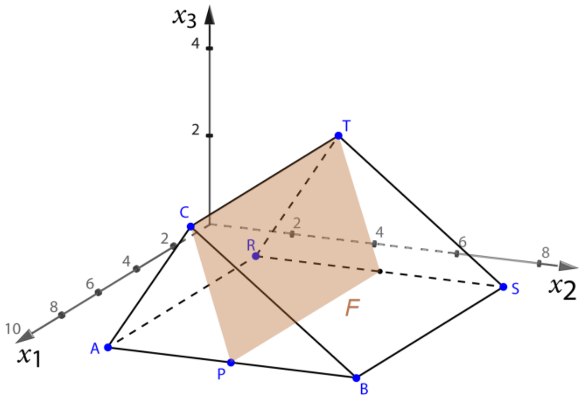
NOTIZEN




Die Flächen *APC* und *PBC* stimmen also genau dann überein, wenn die Seitenlängen $|\overrightarrow{AP}|$ und $|\overrightarrow{PB}|$ gleich sind. Das bedeutet, dass *P* der Mittelpunkt der Strecke *AB* sein muss:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(10|5|0)$$

### SCHNITTFIGUR IN DER ZEICHNUNG

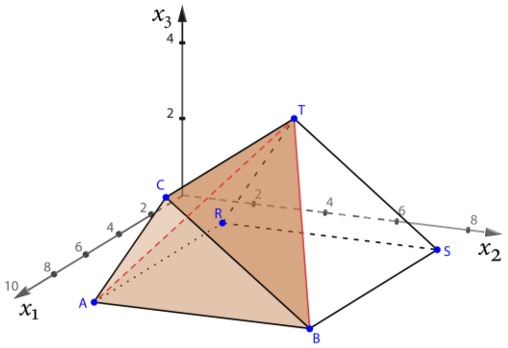



e)

### TEILKÖRPER

Der eine Teilkörper hat die Ecken $A, B, C$ und $T$. $ABCT$ ist eine dreiseitige gerade Pyramide mit der Grundfläche $ABC$ und der Spitze $T$:

Geometrie II




NOTIZEN

### VERGLEICH DER VOLUMINA

Die Pyramide $ABCT$ und das Prisma $ABCRST$ haben die gleiche Grundfläche, nämlich das Dreieck $ABC$, und die gleiche Höhe, nämlich die Strecke $[CT]$. Also gilt für ihre Volumina:

$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$ und $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit gleichem $G$ und $h$.

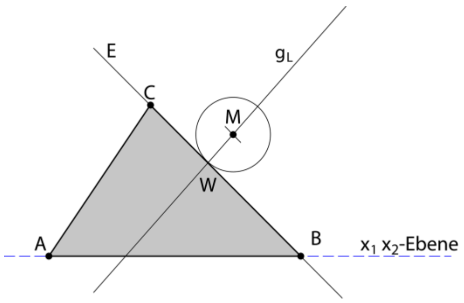
Somit nimmt die Pyramide $ABCT$ ein Drittel des Prismenvolumens ein und der andere Teilkörper $ABSRT$ muss folglich zwei Drittel des Volumens vom Prisma besitzen.

Damit sind die Volumina der beiden Teilkörper verschieden. □

f)

### ZUSAMMENHANG

Die Seitenfläche $BSTC$ ist Teil der Ebene $E$ aus Teilaufgabe b). Der Berührpunkt $W$ ist der Lotfußpunkt des Mittelpunktes $M$ in der Ebene.




GERADE $g_L$ DURCH $M$ SENKRECHT ZU $E$

Mit dem Aufpunkt $M$ und dem Richtungsvektor $\vec{n}$ ergibt sich:

$$g_L: \vec{X} = \vec{M} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 0\lambda \\ 6{,}5 + 3\lambda \\ 3 + 4\lambda \end{pmatrix}$$

BERÜHRPUNKT $W$

NOTIZEN

$W$ ist der Schnittpunkt von $g_L$ und $E$.

$g_L$ in $E$ einsetzen:

$$3 \cdot (6{,}5 + 3\lambda) + 4 \cdot (3 + 4\lambda) - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 19{,}5 + 9\lambda + 12 + 16\lambda - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 25\lambda = -7{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -0{,}3$$

Man setzt diesen Wert für $\lambda$ in $g$ ein und erhält:

$$\overrightarrow{OW} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} - 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 - 0{,}9 \\ 3 - 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Berührpunkt $W(5|5{,}6|1{,}8)$.

**RADIUS *r* DER KUGEL**

$$r = d(M, W) = \left|\overrightarrow{MW}\right| = \left|\overrightarrow{OW} - \overrightarrow{OM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}9 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{0^2 + (-0{,}9)^2 + (-1{,}2)^2} = 1{,}5 \text{ [LE]}.$$

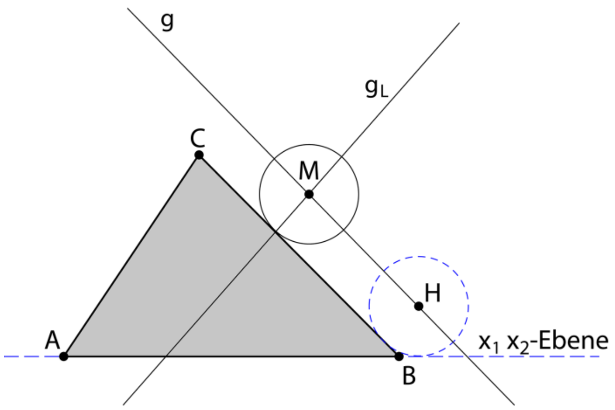
g)

**GLEICHUNG VON *g***

$$g: \vec{X} = \vec{M} + \lambda \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**ENDPUNKT *H* DES WEGES VOM KUGELMITTELPUNKT**

Die Kugel rollt so, dass sich ihr Mittelpunkt von $M$ bis zu einem Punkt $H$ bewegt:



Der Punkt $H$ muss zwei Bedingungen erfüllen:

1. Er muss auf der Geraden $g$ liegen, weil der Mittelpunkt sich durchgehend auf dieser Geraden bewegt.
2. Im Moment, wenn die Kugel den Boden berührt, befindet sich ihr Mittelpunkt genau $r = 1{,}5\ \mathrm{LE}$ vom Boden entfernt. Also muss die $x_3$-Koordinate von $H$ den Wert 1,5 haben.

Also ist $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aus der Gleichung für die $x_3$-Koordinate: $1{,}5 = 3 - 3 \cdot \lambda$ folgt $\lambda = 0{,}5$ und:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Longrightarrow H(5|8,5|1,5)$$

### LÄNGE DES GESUCHTEN WEGES

Länge des vom Kugelmittelpunkt zurückgelegten Weges:

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{MH}\right| = \sqrt{2^2 + (-1{,}5)^2} = 2{,}5\ [\mathrm{LE}]$$

Somit beträgt die Länge des Weges des Kugelmittelpunktes $2{,}5\ \mathrm{LE}$.