NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Geometrie I

Bayern 2012

Aufgabe 1

a)

NORMALENVEKTOR

A, B und C sind drei Ecken eines Rechtecks, liegen also nicht auf einer Geraden und definieren daher eine Ebene.

Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \times \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\12\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ vereinfachter Normalenvektor: $\vec{n} = \frac{1}{6}\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

EBENENGLEICHUNG

Komponenten von $\vec{n}$ sind Koeffizienten in der Koordinatengleichung:

$E: x_2 + 2x_3 + c = 0$

Einsetzen von A liefert c:

$2 + 6 + c = 0 \Longrightarrow c = -8.$

Damit lautet die vollständige Ebenengleichung $E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$.

b)

ABSTAND PUNKT-EBENE

Mit der Abstandsformel ergibt sich:

NOTIZEN

$$d(R,E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_0|}{|\vec{n}|}$$
$$= \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}6\ [\mathrm{m}]$$

c)

DREI FEHLENDE PUNKTE

$H(2|6|1)$

$L(1|4|2)$

$K(1|6|1)$

FLÄCHENINHALT DES FENSTERS

Die Fensterbreite $\overline{GL} = 1\ [\mathrm{m}]$ ist in der Angabe schon genannt.

Fensterhöhe:

$$|\overrightarrow{GH}| = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}| = \left|\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\ [\mathrm{m}]$$

Flächeninhalt des Fensters: $A_R = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \approx 2{,}24\ [\mathrm{m}^2]$

ANTWORT: Das Fenster hat einen Flächeninhalt von ca. $\mathbf{2{,}24\ m^2}$.

d)

SCHNITTPUNKT *S* ZWISCHEN LICHTSTRAHL UND SEITENWAND

Der Lichtstrahl verläuft entlang der Geraden

$$s: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \cdot \overrightarrow{u_s} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix}.$$

Die Ebene, die die Seitenwand $OPQR$ enthält, ist die x_1-x_3-Ebene.
Also lautet Ihre Gleichung $E_2: x_2 = 0$.

S ist nun der Schnittpunkt der Geraden s mit E_2. Die x_2-Koordinate des Punktes S auf s muss daher null sein.

Also:

$$4 - 8\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0{,}5$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1{,}5\end{pmatrix} \Longrightarrow S(1|0|1{,}5)$$

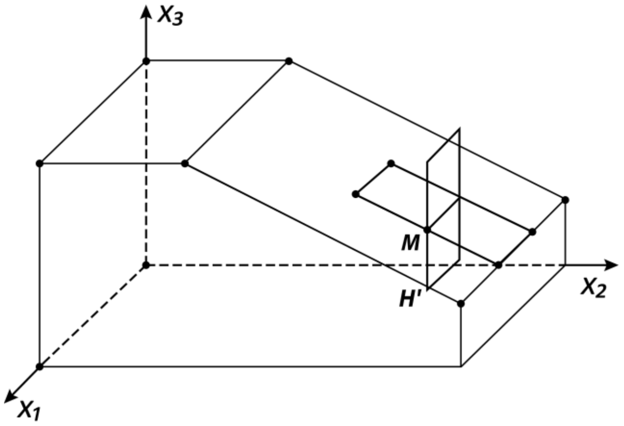
WINKEL ZWISCHEN LICHTSTRAHL UND SEITENWAND

Es handelt sich um den Schnittwinkel zwischen der Geraden s und der Ebene E_2.

$$\text{Winkel}(s, E_2) = \sin^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{u_s} \circ \overrightarrow{n_{E2}}}{|\overrightarrow{u_s}| \cdot |\overrightarrow{n_{E2}}|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix}-2\\-8\\-1\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right|}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{69} \cdot \sqrt{1}}\right) \approx 74{,}4\,°.$$

e)



KOORDINATEN DES PUNKTES *M*

M ist der Mittelpunktes der Strecke $[GH]$, also

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{G} + \vec{H}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2\\5\\1{,}5\end{pmatrix} \Longrightarrow M(2|5|1{,}5)$$

HALBE FENSTERLÄNGE

Die Fensterecke H schwenkt bei der Drehung auf den Punkt H^* senkrecht unter M. Der Abstand von H^* zu M ist die Hälfte der in c) berechneten Fensterhöhe, also $d(M, H^*) = 0{,}5 \cdot \sqrt{5} \approx 1{,}12\ [\text{m}]$.

ABSTAND VON *M* ZUM BODEN

Weil der Boden die x_1x_2-Ebene ist, ist $d(M, \text{Boden})$ der Wert der x_3-Koordinate von M, also $d(M, \text{Boden}) = 1{,}5\ [\text{m}]$.

BODENBERÜHRUNG

Wegen $1{,}12\text{ m} < 1{,}5\text{ m}$, d. h. $d(M, H^*) < d(M, \text{Boden})$, berührt das Fenster den Boden tatsächlich nicht.□

NOTIZEN

NOTIZ
EN

f)

BREITE *B* DES MÖBELSTÜCKS

Messung ergibt eine Schrankhöhe von 1,2 cm im Bild. Somit ist der Maßstab etwa $\frac{1{,}2\text{ cm}}{40\text{ cm}} = 3:100$.

Die Schrankbreite beträgt im Bild ca. $7{,}8\text{ cm}$ und folglich in Wirklichkeit:

$$b \approx 7{,}8 \cdot \frac{100}{3}\text{ cm} = 260\text{ cm} = 2{,}60\text{ m}.$$

TIEFE *T* DES MÖBELSTÜCKS

Die senkrechte Wand des Zimmers unter dem Fenster liegt (wie z. B. den Punkten C und D zu entnehmen) in der Ebene $x_2 = 6$.
Die Gerade k ist parallel zur Wand mit $x_2 = 5{,}5$.

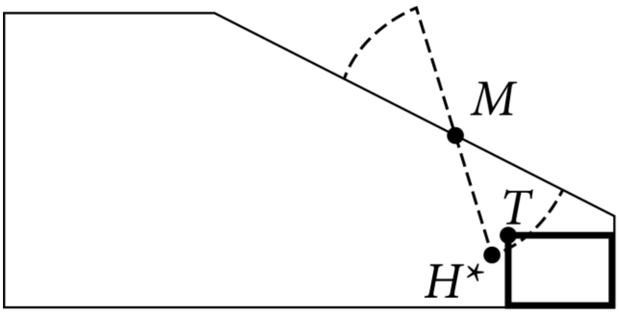
ERLÄUTERUNG

Da der Schrank quaderförmig ist und parallel zu den Koordinatenachsen steht, ist seine Tiefe die Differenz der x_2-Koordinaten von Wand und Gerade k, nämlich $t = 6{,}0\text{ m} - 5{,}5\text{ m} = 0{,}5\text{ m}$.

g)

Ist der Abstand von der Drehachse des Fensters bis zur Oberkante des Möbelstücks größer als die Länge der unteren Fensterhälfte, so stößt das Fenster bei Schwenken nicht an.

SKIZZE



((M-GYM-ABI-2012-BY-Geometrie_I-ML-02))

H^* sei die bewegliche Fensterecke und T der Punkt auf der Geraden k (Oberkante des Schrankes), der im skizzierten senkrechten Querschnitt liegt. Der Querschnitt ist parallel zur x_2-x_3-Ebene und enthält M, liegt also in der Ebene $x_1 = 2$.

ABSTÄNDE

NOTIZEN

Länge der unteren Fensterhälfte: $0{,}5 \cdot \sqrt{5} \approx 1{,}12\ [\mathrm{m}]$ (vgl. Teilaufgabe $1\mathrm{e}$))

Abstand von M zu k: $d(M,k) = d(M,T)$

T liegt auf der Geraden k, also ist $\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Da T im Querschnitt $x_1 = 2$ liegt, ist sein Parameter $\lambda = 2$ und somit $T(2|5{,}5|0{,}4)$.

Der Abstand von M zur Geraden k ist folglich:

$$\begin{aligned} d(M;k) &= d(M;T) = \left|\overrightarrow{MT}\right| = \left|\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}1^2} = \sqrt{1{,}46} \approx 1{,}21\ [\mathrm{m}]. \end{aligned}$$

ANTWORT: $d(M;k) = 1{,}21\ \mathrm{m}$ ist immer noch mehr als die bei e) berechnete halbe Fensterhöhe von $1{,}12\ \mathrm{m}$. Also stößt das Fenster nicht am Schrank an.