Abitur Mathematik Bayern

2012

Analysis II

NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis II

Bayern 2012

Teil 1

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 3}$$

DEFINITIONSMENGE

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 + 4x + 3 \overset{!}{=} 0$$

Lösungen $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -2 \pm 1$,

d.h. $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$ sind verboten.

$\Longrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$

NULLSTELLE

Nullstelle von f ist die Nullstelle des Zählers:

$2x + 3 = 0 \Longrightarrow x_N = -1{,}5 \in D$

Aufgabe 2

a)

ABLEITUNG g'

mit Produktregel und Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= x \cdot (e^{-2x})' + 1 \cdot e^{-2x} \\ &= x \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{-2x} \\ &= -2x \cdot e^{-2x} + e^{-2x}. \end{aligned}$$

NULLSTELLE DER ABLEITUNG

$$g'(x) = e^{-2x} \cdot (1-2x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0,$$

denn $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Faktor $1-2x$ wird 0 bei $x_E = 0{,}5$.

y-WERT

$$g(0{,}5) = 0{,}5 \cdot e^{-1} = \frac{1}{2 \cdot e} \approx 0{,}18.$$

Der gesuchte Punkt mit waagerechter Tangente ist somit $\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2e}\right)$.

b)

GRENZWERTE DER FUNKTION

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{\to \infty}}}_{\to \infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 3

a)

VERÄNDERUNG DES GRAPHEN

Die Logarithmusfunktion wird zuerst an der x-Achse gespiegelt und dann um 3 Einheiten in y-Richtung nach oben verschoben.

b)

ALLGEMEINE TANGENTENGLEICHUNG

allgemeine Geradengleichung: $y = m \cdot x + t$.

STEIGUNG

Es ist $h'(x) = -\frac{1}{x}$, also $m = h'(1) = -1$.

ACHSENABSCHNITT

$h(1) = -\ln(1) + 3 = 3$, also ist der Berührpunkt $(1|3)$.

Steigung und Berührpunkt in die allgemeine Geradengleichung einsetzen liefert

$3 = -1 \cdot 1 + t \Longrightarrow t = 4$.

FERTIGE TANGENTENGLEICHUNG

$y = -x + 4$

NOTIZEN

Aufgabe 4

a)

EIGENSCHAFT JEDER INTEGRALFUNKTION

Da ein Integral der Länge 0 immer den Wert 0 hat, ist grundsätzlich und unabhängig vom Integranden

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

An der unteren Grenze a hat also jede Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Nullstelle. Anders gesagt: $I_a(a) = 0$ gilt für jede Integralfunktion I_a.

b)

GEWÄHLTE FUNKTION

$F(x) = x \cdot (x+1) = x^2 + x$ hat die zwei Nullstellen $x = 0$ und $x = -1$ und ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Ableitung $f(x) = F'(x) = 2x + 1$ ist ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und erfüllt $\int_{-1}^{x} f(t)dt = F(x)$. Somit sind alle geforderten Bedingungen gewährleistet.

Teil 2

Aufgabe 1

a)

ANSATZ

Allgemeine quadratische Funktion: $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Punkte A, B und C einsetzen liefert:

NOTIZEN

I: $4a - 2b + c = 0$ (Punkt *A* eingesetzt)

II: $4a + 2b + c = 0$ (Punkt *B* eingesetzt)

III: $c = 5$ (Punkt *C* eingesetzt)

NOTIZEN

NOTIZEN

GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

$c = 5$ aus III in I und II einsetzen liefert:

$\mathrm{I}': 4a - 2b + 5 = 0$

$\mathrm{II}': 4a + 2b + 5 = 0$

$\mathrm{II}' - \mathrm{I}' : -4b = 0 \Longrightarrow b = 0$

$b = 0$ in I' einsetzen liefert

$$4a + 5 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

ANTWORT

$p(x) = -1{,}25x^2 + 5.$

b)

SYMMETRIE BEZÜGLICH DER y-ACHSE

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} q(-x) &= -0{,}11(-x)^4 - 0{,}81(-x)^2 + 5 \\ &= -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 \\ &= q(x). \end{aligned}$$

Also ist q achsensymmetrisch zur y-Achse. □

PUNKTE A UND B

$q(-2) = -0{,}11 \cdot (-2)^4 - 0{,}81 \cdot (-2)^2 + 5 = 0$

Also liegt $A(-2|0)$ auf G_q.

$q(2) = -0{,}11 \cdot 2^4 - 0{,}81 \cdot 2^2 + 5 = 0$

Also liegt $B(2|0)$ auf G_q. □

GENAU EIN EXTREMPUNKT

$q'(x) = -0{,}44x^3 - 1{,}62x$

$$\begin{aligned} q'(x) = 0 &\Leftrightarrow -0{,}44x^3 - 1{,}62x = 0 \\ &\Leftrightarrow -x \cdot (0{,}44x^2 + 1{,}62) = 0 \end{aligned}$$

Durch den linken Faktor ergibt sich die Nullstelle $x_{E_1} = 0$, während der 2. Faktor wegen des Quadrats nie null wird.

$\Longrightarrow$ Der Graph G_q hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich bei $x_{E_1} = 0$.

$q''(x) = -1{,}32x^2 - 1{,}62$

NOTIZEN

Wegen $q''(0) = -1{,}62 \neq 0$ liegt ein Extremum vor. Es gibt also tatsächlich genau einen Extrempunkt, und dieser liegt bei $x_{E_1} = 0$ und ist somit der Punkt C. □

c)

VERGLEICHSWERTE PRÜFEN

Aus der Graphik geht hervor, dass sich die Funktionen an der Stelle $x = 1$ deutlich unterscheiden. Mit den Funktionstermen ergibt sich

$q(1) \approx 4{,}08$ und $p(1) \approx 3{,}75 < q(1)$.

Somit ist klar, dass zu p der untere Graph gehören muss, das ist der gestrichelte. Zu q gehört folglich der durchgezogene Graph.

d)

ZIELFUNKTION

$$\begin{aligned} d(x) &= -0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5 - (-1{,}25x^2 + 5) \\ &= -0{,}11x^4 + 0{,}44x^2 \end{aligned}$$

ABLEITUNG

$$\begin{aligned} d'(x) \overset{!}{=} 0 &\Leftrightarrow -0{,}44x^3 + 0{,}88x = 0 \\ &\Leftrightarrow -0{,}44x \cdot (x^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

NULLSTELLEN DER ABLEITUNG PRÜFEN

Nur $x_0 = +\sqrt{2}$ liegt im gefragten Intervall $]0; 2[$.

$d''(\sqrt{2}) = -1{,}76 < 0 \Rightarrow$ Bei $x = \sqrt{2}$ liegt ein Maximum vor.

zugehörige Differenz: $d(\sqrt{2}) = -0{,}44 + 0{,}88 = 0{,}44$.

ANTWORT

Die größte Differenz $q(x) - p(x)$ im Intervall $]0; 2[$ findet sich an der Stelle $x_0 = +\sqrt{2}$. Und zwar beträgt die Differenz dort $0{,}44$.

e)

FLÄCHENINHALT

Der vom Kunstwerk eingenommene Teil der Wand wird im Modell vom Funktionsgraph und der x-Achse begrenzt und liegt zwischen den zwei Nullstellen von q:

NOTIZEN

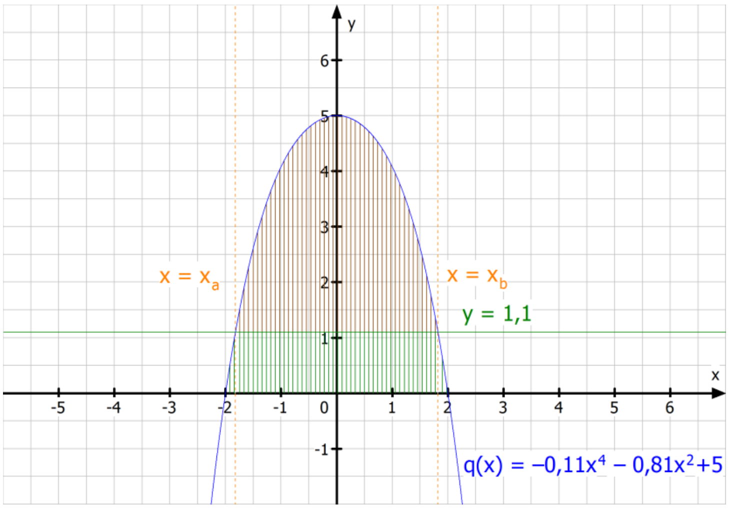
$$A \approx \int_{-2}^{2} (-0{,}11x^4 - 0{,}81x^2 + 5)dx$$
$$= [-0{,}022x^5 - 0{,}27x^3 + 5x]_{-2}^{2}$$
$$= 7{,}136 + 7{,}136 = 14{,}272\ [\mathrm{m}^2]$$

ANTWORT

Das Kunstwerk nimmt einen Flächeninhalt von ca. $14{,}27\ \mathrm{m}^2$ ein.

f)

SKIZZE



VORGEHEN

Ein mögliches Vorgehen ist:

1. Man bestimmt die x-Werte x_a und x_b der Schnittpunkte von G_q und der Geraden $y = 1{,}1$. Dazu setzt man $q(x) = 1{,}1$ und löst (z. B. durch Substitution $u = x^2$) nach x auf.

2. Dann berechnet man die braun markierte obere Teilfläche
$$A_1 = \int_{x_a}^{x_b} (q(x) - 1{,}1)\, dx$$
und die grün markierte untere Teilfläche $A_2 = A - A_1$.

3. Das Verhältnis ist dann $\frac{A_1}{A_2}$ (oder umgekehrt, denn die Frage legt das nicht fest).

Aufgabe 2

NOTIZEN

a)

HOCHPUNKT

Man kann ungefähr ablesen: $H(4|74)$

Das bedeutet, dass der höchste Durchfluss von ca. $74\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$ vier Minuten nach Öffnung der Schleuse auftritt.

WENDESTELLEN

Der erste Wendepunkt liegt bei ungefähr $t = 2{,}3$.

Das bedeutet, dass der größte Anstieg des Durchflusses ca. 2,3 Minuten nach Öffnen der Schleuse auftritt.

Der zweite Wendepunkt liegt bei ungefähr $t = 5{,}7$.

Das bedeutet, dass die stärkste Abnahme des Durchflusses ca. 5,7 Minuten nach Öffnen der Schleuse auftritt.

b)

INTEGRALWERT

Zwischen Graph und x-Achse sind ungefähr 57 Kästchen mit der Einheit $\frac{1}{2}$ min auf der t-Achse und der Einheit $5\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}$ auf der y-Achse.

Deshalb kann man annähern:

$$\int_1^4 f(t)\,dt \approx 57 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{min} \cdot 5\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}} = 142{,}5\ \mathrm{m}^3.$$

BEDEUTUNG IM SACHZUSAMMENHANG

In den 3 Minuten ab 1 Minute nach Schleusenöffnung bis 4 Minuten nach Schleusenöffnung fließen ca. $142{,}5\ \mathrm{m}^3$ Wasser am Messpunkt vorbei.

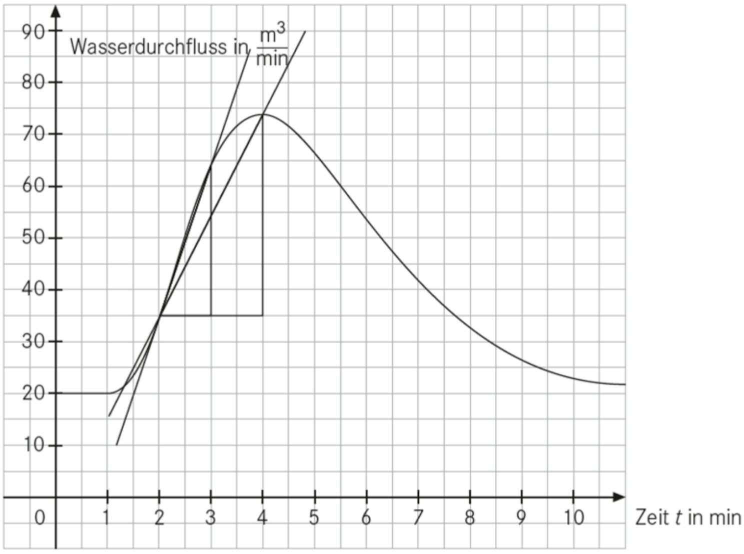
c)

MITTLERE ÄNDERUNGSRATEN

$$t = 4\colon \mathrm{m.Ä.} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \approx \frac{74\ -\ 35}{2} = 19{,}5\ \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}^2}\right]$$

$$t = 4\colon \mathrm{m.Ä.} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \approx \frac{64\ -\ 35}{1} = 29\ \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}^2}\right]$$

NOTIZEN



BEDEUTUNG DES GRENZWERTES

Der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = f'(2)$ entspricht der momentanen Änderungsrate des Durchflusses zum Zeitpunkt $t = 2$ min.