NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis I

Bayern 2012

Teil 1

Aufgabe 1

a)

DEFINITIONSMENGE

$f(x) = \ln(x+3)$

$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
$\Longrightarrow D_f =]-3;\ +\infty[$

ABLEITUNG

Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{1}{x+3} \cdot 1 = \frac{1}{x+3}$$

b)

DEFINITIONSMENGE

$$g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

ABLEITUNG

Quotientenregel liefert

$$g'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 1) - 3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$$

Aufgabe 2

a)

$f(x) = -x^2 + 5$ mit $D_f = \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung.

b)

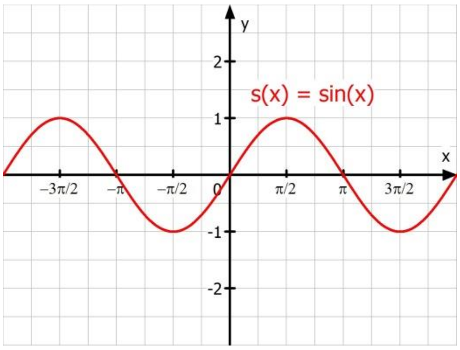
$g(x) = |x - 5|$ mit $D_g = \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung.

Aufgabe 3

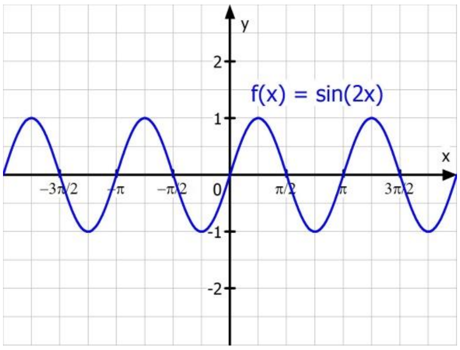
a)

$f(x) = \sin(2x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Skizze von der Sinus-Funktion $s(x) = \sin(x)$:



Skizze von $f(x) = \sin(2x)$:



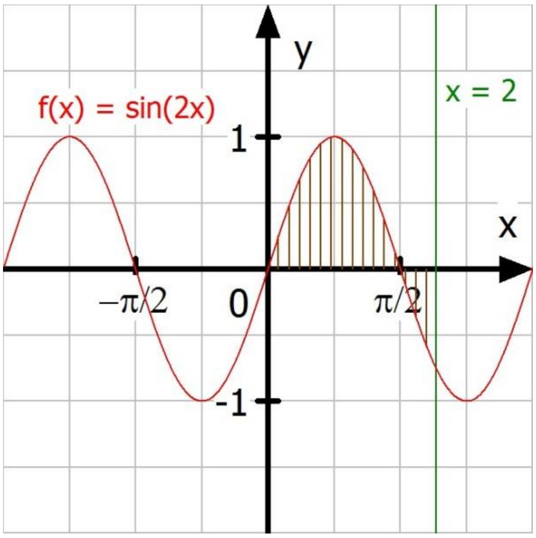
Zwei benachbarte Nullstellen sind z.B.: $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

NOTIZEN

NOTIZEN

b)

SKIZZE ZUM INTEGRAL



STAMMFUNKTION F VON f

Stammfunktion von $x \longmapsto \sin x$: $x \longmapsto -\cos x$

Nach der Formel für lineare Substitutionen ist daher

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos(2x)\right) = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

(Probe: $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = \sin(2x) = f(x)$)

BESTIMMTES INTEGRAL

$$\int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(4) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(0)\right)$$

$\approx 0{,}33 - (-0{,}5) = 0{,}83.$

INTEGRAL UND FLÄCHENINHALT

Das Integral $\approx 0{,}83$ ist die Flächenbilanz der vorzeichenbehafteten Teilflächen.

Der Flächeninhalt ist die Summe der Teilflächen, alle positive gewertet.

Integral und Flächeninhalt stimmen nur überein, wenn alle Flächenteile, die dazu gehören, *oberhalb der x-Achse* liegen. Das ist hier nicht der Fall, da der Integrand zwischen $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = 2$ negativ ist. Deswegen stimmen Integral und Flächeninhalt nicht überein.

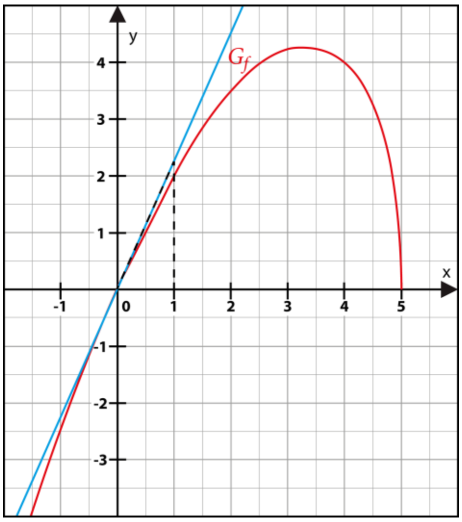
NOTIZEN

Aufgabe 4

STEIGUNGSWERT IN $(\mathbf{0}|\mathbf{0})$

Eine Tangente t am Graphen von f im Punkt $(0|0)$ mit Steigungsdreieck zeigt:

$m_t = f'(0) \approx 2{,}3.$



Also ist ein Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion f' näherungsweise $A(0|2{,}3)$.

NULLSTELLE DER ABLEITUNG

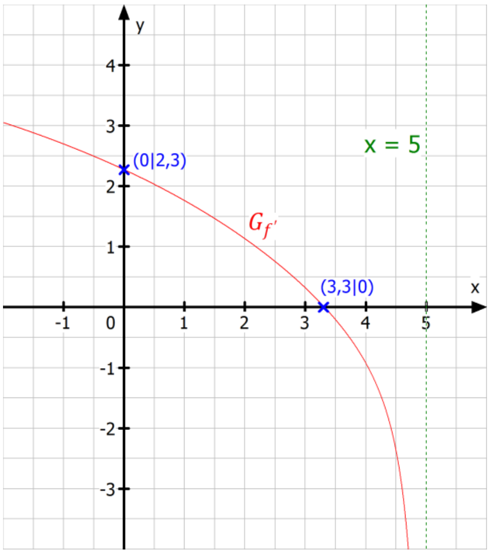
Die einzige waagrechte Tangente ist beim Hochpunkt, also bei ca. $x = 3{,}3$. Dort liegt die Nullstelle von f'.

GRENZWERT FÜR $x \longrightarrow 5$

Der Funktionsgraph wird für $x \longrightarrow 5$ unendlich steil fallend. Somit gilt: $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^-} f'(x) = -\infty.$

NOTIZEN

GRAPH DER ABLEITUNGSFUNKTION



NOTIZEN

Teil 2

Aufgabe 1

a)

SCHNITTPUNKTE MIT DER x-ACHSE

$$f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2e^{x} = 0$$

$\Longrightarrow$ Kein Schnittpunkt mit der x-Achse vorhanden: Der Zähler wird nie 0, da $e^{x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

SCHNITTPUNKT MIT DER y-ACHSE

$$f(0) = \frac{2e^{0}}{e^{0} + 9} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 9} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$\Longrightarrow$ Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Punkt $S(0|0{,}2)$

$\Longrightarrow$ *Fazit*: Der eben gefundene Punkt S ist der einzige Achsenschnittpunkt.

b)

Grenzwert $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{x} + 9} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{x} \cdot (1 + 9e^{-x})} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{1 + 9e^{-x}} = 0$$

Geht x gegen $-\infty$, so geht e^{-x} im Nenner gegen $+\infty$, also der Wert des Bruches gegen 0.

Grenzwert $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{x} + 9} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{x} \cdot (1 + 9e^{-x})} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{1 + 9e^{-x}} = \frac{2}{1 + 0} = 2$$

c)

G_f steigt genau dann streng monoton in ganz $\mathbb{R}$, wenn die Ableitung $f'(x)$ überall positiv ist.

NOTIZEN

Ableitung mit Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^x \cdot (e^x + 9) - 2 \cdot e^x \cdot e^x}{(e^x + 9)^2}$$
$$= \frac{2 \cdot e^x \cdot e^x + 18 \cdot e^x - 2 \cdot e^x \cdot e^x}{(e^x + 9)^2}$$
$$= \frac{18 \cdot e^x}{(e^x + 9)^2}$$

MONOTONIE

Da e^x immer positiv ist, ist der Zähler des Bruches immer positiv und ebenso der Term $e^x + 9$ im Nenner sowie dessen Quadrat.

Somit ist der Wert des Bruches, also der Wert von $f'(x)$, stets positiv. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, steigt G_f in ganz $\mathbb{R}$ streng monoton. □

d)

Gesucht ist eine Geradengleichung der Form $y = mx + t$ für die Tangente.

STEIGUNG $\boldsymbol{m}$

$$m = f'(0) = \frac{18 \cdot e^0}{(e^0 + 9)^2} = \frac{18}{10^2} = 0{,}18.$$

ACHSENABSCHNITT $\boldsymbol{t}$

$f(0) = 0{,}2$ ist aus 1a) bekannt. $S(0|0{,}2)$ liegt auf der y-Achse.

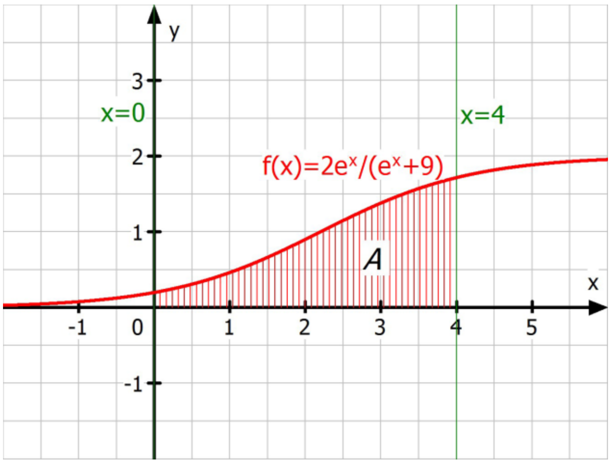
$\Longrightarrow$ Achsenabschnitt $t = 0{,}2$

TANGENTENGLEICHUNG

Tangentengleichung: $y = 0{,}18x + 0{,}2$.

e)

FLÄCHE



NOTIZEN

Die Fläche liegt ganz oberhalb der x-Achse. Also ist

$$A = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \frac{2 \cdot e^x}{e^x + 9} dx.$$

Integrationsregel:

$$\int \frac{f_1{}'(x)}{f_1(x)} dx = \ln|f_1(\mathrm{x})| + \mathrm{c}$$

Hier ist $f_1(x) = e^x + 9$. Folglich ist $f_1{}'(x) = e^x$.

$$A = \int_0^4 \frac{2 \cdot e^x}{e^x + 9} dx = 2 \cdot \int_0^4 \frac{e^x}{e^x + 9} dx = 2 \cdot [\ln|e^x + 9|]_0^4$$
$$= 2 \cdot [\ln(e^4 + 9) - \ln(10)] \approx 3{,}7[\mathrm{FE}]$$

ANTWORT: Die gesuchte Fläche hat einen Inhalt von ca. 3,7 FE.

f)

UMKEHRBARKEIT

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist laut 1c) in ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Daraus folgt, dass $f(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar ist.□

DEFINITIONS- UND WERTEMENGE DER UMKEHRFUNKTION

Laut Aufgabenstellung ist $D_f = \mathbb{R}$.

Nach Teilaufgabe b) ist

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Wegen der Monotonie ist 0 untere Grenze und 2 die obere Grenze des Wertebereichs. Nach Teilaufgabe a) liegt 0 nicht im Wertebereich von f. Gäbe es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 2$, so wäre aufgrund der strengen Monotonie
$f(x_0 + 1) > 2$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq f(x_0 + 1) > 2$ im Widerspruch zu Teilaufgabe b).

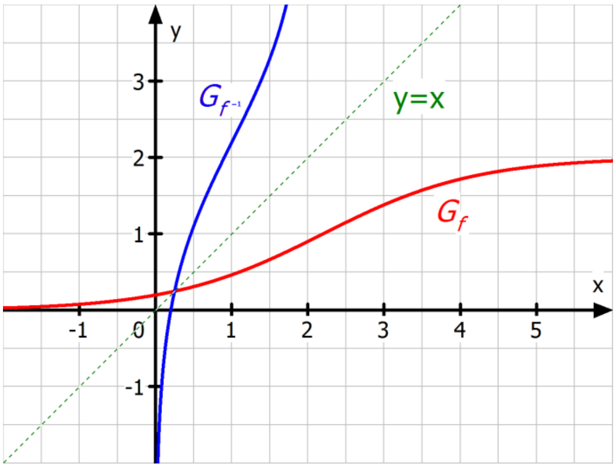
W_f ist also das offene Intervall $]0; 2[$.

$D_{f^{-1}} = W_f =]0; 2[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.

NOTIZEN

ZEICHNUNG

G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln:



Aufgabe 2

a)

WACHSTUM

$f(0) = 0{,}2$ [m] Höhe der Sonnenblume zu Beobachtungsbeginn

$f(2) \approx 0{,}902$ [m] Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt 2 [Monate]

Das Wachstum innerhalb dieser Frist ist daher:

$f(2) - f(0) \approx 0{,}902 - 0{,}2 = 0{,}702$ [m].

ANTWORT: Eine Sonnenblume der Sorte Alba wächst in den ersten zwei Monaten nach Beobachtungsbeginn ca. 70cm.

b)

Gesucht ist ein x, sodass $f(x) = 1{,}5\ [\mathrm{m}]$ gilt.

NOTIZEN

$f(x) \overset{!}{=} 1{,}5$	Funktionsterm einsetzen	**NOTIZEN**
$\dfrac{2 \cdot e^x}{e^x + 9} = 1{,}5$	$\| \cdot (e^x + 9)$	
$2 \cdot e^x = 1{,}5 \cdot (e^x + 9)$	Klammer ausmultiplizieren	
$2 \cdot e^x = 1{,}5 \cdot e^x + 13{,}5$	$\| -1{,}5 \cdot e^x; \quad : 0{,}5$	
$e^x = 27$	logarithmieren	
$x = \ln(27) \approx 3{,}3$ [Monate]		

NOTIZEN

ANTWORT: Die Höhe von $1{,}5\ \mathrm{m}$ wird ungefähr 3,3 Monate (oder ca. 3 Monate und 9 Tage) nach Beobachtungsbeginn erreicht.

GRAFISCHE ÜBERPRÜFUNG

Die grafische Lösung besteht darin, einen passenden x-Wert zum y-Wert 1,5 [m] am Graphen von f zu suchen.

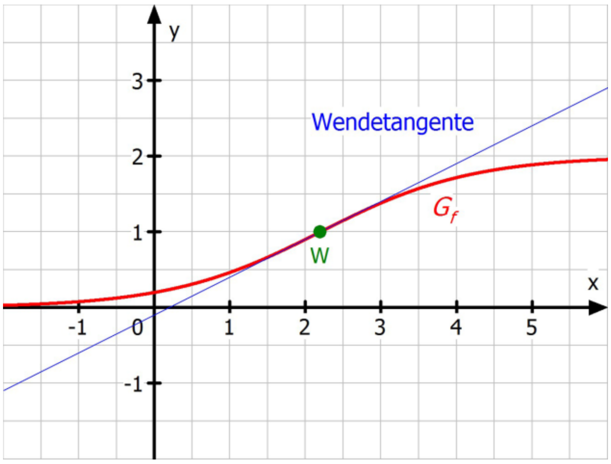
Man zeichnet die Gerade $y = 1{,}5$ ein und markiert deren Schnittpunkt mit G_f. Der x-Wert dieses Schnittpunkts sollte mit dem oben berechneten Wert 3,3 übereinstimmen.

c)

NÄHERUNGSWERT FÜR X_M

Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze ist die momentane Änderungsrate, d.h. die Ableitung der Funktion f.

Der Punkt mit dem schnellsten Wachstum ist also ein Hochpunkt der Ableitung und somit ein Wendepunkt von G_f. Dieser Punkt hat einen x-Wert von ungefähr $x_M = 2{,}2$ Monaten, wie in der Zeichnung zu sehen ist.



NÄHERUNGSWERT FÜR DIE MAXIMALE WACHSTUMSRATE

Das schnellste Wachstum entspricht der maximalen Wachstumsrate, also der Ableitung an der Stelle $x_M = 2{,}2$.

$$f'(2{,}2) = \frac{18 \cdot e^{2{,}2}}{(e^{2{,}2} + 9)} \approx 0{,}5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Monat}}\right] = \frac{50\mathrm{cm}}{30\ \mathrm{Tage}} \approx 1{,}7 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{Tag}}.$$

ANTWORT: Die maximale Wachstumsrate der Blumen beträgt ca. 1,7 cm pro Tag.

d)

Im Moment des Auskeimens, also bei ca. $x = -0{,}5$ [Monate], haben die Sonnenblumen die Höhe 0 [m]. Eine Funktion, die das Wachstum sinnvoll modellieren soll, muss also eine Nullstelle bei ca. $x = -0{,}5$ haben.

NOTIZEN

NULLSTELLE DER TANGENTE

Tangentengleichung 0 setzen:

$$0{,}18x + 0{,}2 \overset{!}{=} 0 \qquad |-0{,}2;\ :0{,}18$$

$$x \approx -1{,}1 \text{ [Monate]}$$

Dies ist deutlich kleiner als $-0{,}5$ (bzw. deutlich früher vor Beobachtungsbeginn, nämlich 1,1 Monate oder 4-5 Wochen vorher). Deshalb steht die Annahme des Biologen nicht in Einklang mit dem Zeitpunkt des Auskeimens.

e)

BEDINGUNGEN AN DIE FUNKTION g

Zu Beginn der Beobachtung einer Sonnenblume der Sorte Tramonto betrage ihre Höhe 0,2 m. Da g die Höhe dieser Pflanze beschreiben soll, muss $g(0) = 0{,}2$ sein. Dies ist genau $f(0)$, also die Höhe einer Sonnenblume der Sorte Alba, deren Wachstum durch f beschrieben wird.

Deswegen muss laut Aufgabenstellung folgende Bedingungen erfüllt sein:

$g(x) = f(2x)$
(gleiche Höhe, wenn die Zeit bei g halb so groß ist wie bei f)

Aus Bedingung (2) folgt, dass mit f auch g (als Verkettung zweier streng monoton wachsender Funktionen) streng monoton steigt.

FUNKTION I

Prüfen der Bedingung (1):

Wenn $g(x) = \text{Term } I$ wäre, dann gälte

$$g(0) = \frac{2e^{0+k}}{e^{0+k}+9} = \frac{2e^k}{e^k+9} = f(k)\,.$$

Andererseits soll laut (1) $g(0) = f(0)$ sein.
Daraus folgt $f(0) = f(k)$. Aufgrund der strengen Monotonie von f folgt $k = 0$, was aber der Voraussetzung $k \in \mathbb{R}_0^+$ widerspricht.

Deswegen kommt Funktionsgleichung I nicht infrage.

FUNKTION II

Nehmen wir an, g werde durch den Funktionsterm II beschrieben. Ein Vergleich des Funktionsterms II mit dem von f liefert

NOTIZEN

$$(*)\ g(x) = k \cdot \frac{2e^x}{e^x + 9} = k \cdot f(x)$$

$\Longrightarrow g(0) = k \cdot f(0)$.

Wegen (1) ist also $k \cdot f(0) = f(0) = 0{,}2$

Aus $k \cdot f(0) = f(0)$ folgt mit $f(0) \neq 0$ unmittelbar $k = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$ und somit wegen $(*)$ $g(x) = k \cdot f(x) = f(x)$.

Dann erreicht aber die Sonnenblume der Sorte Tramonto jede Höhe in der gleichen Zeit, wie eine der Sorte Alba, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit kommt auch Term II nicht infrage.

f)

Bedingung (2)

$$g(x) = f(2x) \Longrightarrow \frac{2 \cdot e^{k \cdot x}}{e^{k \cdot x} + 9} = \frac{2 \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 9}$$

Linke und rechte Seite sind für $k = 2$ identisch. Ein passender Wert ist also $k = 2$.