NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analysis I 3

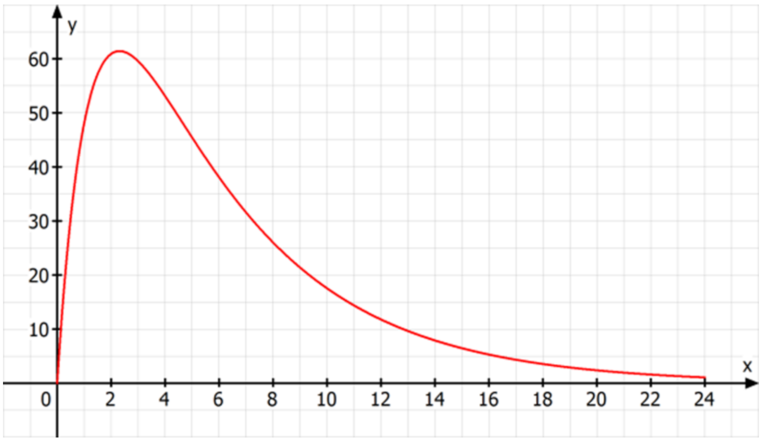
Baden-Württemberg 2012

Aufgabe I 3

a)

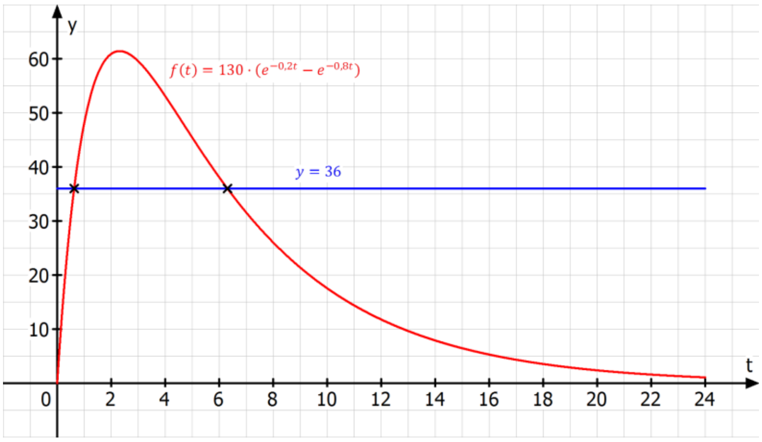
1. SCHRITT: GRAPH SKIZZIEREN

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: Y1=130×(e^(−0.2×X)−e^(−0.8×X)). Übertragung Graphik-Anzeige nach Ausführen des DRAW-Befehls:



2. SCHRITT: WIRKUNGSZEITRAUM BESTIMMEN

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: Y2=36. Nach Ausführen des DRAW-Befehls können im G−Solv-Menü mit dem ISCT-Befehl die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = 36$ bestimmt werden. Ausgabe: X=0.6281048115 und X=6.304990921. Das Zeitintervall, indem das Medikament wirkt, ist somit näherungsweise [0,6; 6,3]:



NOTIZEN

3. SCHRITT: ZEITPUNKT DER STÄRKSTEN ÄNDERUNG DER WIRKSTOFFMENGE BESTIMMEN

Anhand der Skizze ist zu erkennen, dass die größte Zunahme der Wirkstoffmenge unmittelbar nach der Impfung, also bei $t = 0$, stattfindet.

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `Y3=d/dx(Y1)`. Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls kann im `G-Solv`-Menü mit dem Befehl `MIN` die Minimalstelle von f' bestimmt werden. Ausgabe: `X=4.62099`. Die stärkste Abnahme der Wirkstoffmenge findet also etwas mehr als $4\frac{1}{2}$ Stunden nach der Impfung statt.

4. MITTLERE WIRKSTOFFMENGE BESTIMMEN

Die mittlere Wirkstoffmenge im Zeitraum $t \in [0; 12]$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt. \approx 35{,}712$$

Mit dem `∫dx`-Befehl im `G-Solv`-Menü (angewandt auf `Y1`) erhält man nach Eingabe der Untergrenze `X=0` und der Obergrenze `X=12` die Ausgabe `∫dx=428.5443363`. Somit ist

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt \approx \frac{428{,}54}{12} \approx 35{,}71.$$

Bemerkung:

Die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten 12 Stunden beträgt ca. 35,7 mg und liegt damit unterhalb der Mindestanforderung von 36 mg für die Wirksamkeit.

NOTIZEN

b)

1. SCHRITT: LANGFRISTIGE WIRKSTOFFMENGE IM BLUT ABLESEN

Im Funktionsterm $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05 \cdot t})$ strebt $e^{-0,05 \cdot t} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$. Somit gilt

$\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = 80$.

Langfristig bleiben 80 mg Wirkstoff im Blut.

2. SCHRITT: MONOTONIENACHWEIS

Es ist $g'(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05 \cdot t}) \cdot 0,05 = 4 \cdot e^{-0,05 \cdot t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Deswegen nimmt die Wirkstoffmenge im Blut ständig zu.

3. SCHRITT: ZEITPUNKT ZU VORGEGEBENER ÄNDERUNGSRATE BESTIMMEN

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: `Y4=4×e^(-0.05×X)`. Nach Ausführen des DRAW-Befehls und Anpassung des `Xmax`-Parameters im `V-Window`-Menü (zum Wert 30) kann mit dem `X-CAL`-Befehl unter Eingabe des gewünschten y-Werts `Y=1` der zugehörige x-Wert bestimmt werden. Die Ausgabe lautet `X=27.72588722`. Knapp 28 Minuten nach Infusionsbeginn beträgt also die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1 \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}}$.

4. SCHRITT: ZEITINTERVALL ZU GEGEBENER WIRKSTOFFÄNDERUNG ANGEBEN

Gesucht ist zunächst ein Zeitpunkt t_0, so dass $|g(t_0 + 15) - g(t_0)| = 30$ ist. Daraus ergibt sich dann das Zeitintervall $[t_0;\ t_0 + 15]$, in dem sich die Wirkstoffmenge im Blut um 30 mg ändert.

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: `Y5=Abs(80×(1-e^(-0.05×(X+15)))-80×(1-e^(-0.05×X)))`. Ausgabe: `X=6.829515759`. Das gesucht Zeitintervall ist in etwa [6,8; 21,8].

c)

1. SCHRITT: ZUGEHÖRIGE DIFFERENZIALGLEICHUNG ANGEBEN

Die allgemeine Form der Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums lautet

$$g'(t) = k \cdot \big(S - g(t)\big),$$

wobei $k > 0$ die Wachstumskonstante (Proportionalitätsfaktor) und S die obere Schranke ist. Die zugehörige Lösung lautet dann

NOTIZEN

$g(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$,

wobei $c \in \mathbb{R}$ die Differenz zwischen Schranke S und Anfangsbestand $g(0)$ ist. In unserem Fall ist

$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05 \cdot t}) = 80 - 80 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$.

Somit ist g eine Lösung der Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums mit Parametern $S = 80$ und $k = 0{,}05$, und zwar mit $c = S - g(0) = 80$. Diese Differenzialgleichung lautet

$g'(t) = 0{,}05 \cdot \big(80 - g(t)\big)$.

2. SCHRITT: ZUFUHRRATE DES WIRKSTOFFS BESTIMMEN

Die Änderung $g'(t)$ der Wirkstoffmenge im Blut ist die Differenz aus der konstanten Zufuhrrate z und der zum Bestand proportionalen Abbaurate $c_a \cdot g(t)$ ($c_a > 0$ geeignet):

$g'(t) = z - c_a \cdot g(t)$.

Durch Ausmultiplizieren der grünen Differenzialgleichung ergibt sich

$g'(t) = 0{,}05 \cdot \big(80 - g(t)\big) = 4 - 0{,}05 \cdot g(t)$.

Ein Vergleich der letzten zwei Differenzialgleichungen für g liefert

$z = 4$ und $c_a = 0{,}05$. Die konstante Zufuhrrate beträgt somit $4\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}}$.

3. SCHRITT: RATE FÜR LANGFRISTIG FESTE WIRKSTOFFMENGE ERMITTELN

Die langfristige Wirkstoffmenge im Blut ist die obere Schranke S in der Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums. Für $S = 90$ wird die grüne Differenzialgleichung für die neue Lösungsfunktion h zu

$h'(t) = 0{,}05 \cdot \big(90 - h(t)\big) = 4{,}5 - 0{,}05 \cdot h(t)$.

Ein Vergleich dieser Differenzialgleichung mit der braunen zeigt, dass die neue konstante Zufuhrrate $4{,}5\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}}$ betragen muss.