NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analysis I 2

Baden-Württemberg 2012

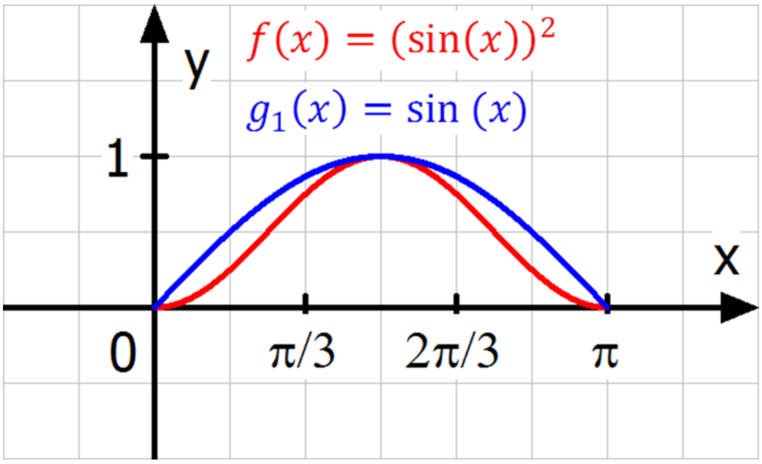
Aufgabe I 2

a)

1. SCHRITT: SKIZZE DER GRAPHEN ERSTELLEN

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: **Y**`1=(sin(X))^2` und **Y**`2=sin(X)`.

Übertragung der Anzeige nach Ausführen des `DRAW`-Befehls:



2. SCHRITT: AMPLITUDE UND PERIODE VON f BESTIMMEN

Auf der GTR-Anzeige ist zu erkennen, dass sich der oben skizzierte Teil des Graphen von f in der Fortsetzung ständig wiederholt, d. h. die Periode von f ist π. Die waagrechte Symmetrieachse des Graphen von f ist die Gerade $y = 0{,}5$. Der Maxima und Minima von f liegen jeweils 0,5 LE von dieser Achse entfernt, d. h. die Amplitude von f ist 0,5.

3. SCHRITT: MAXIMALE WERTEDIFFERENZ ZWISCHEN f UND g_1 FINDEN

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: **Y**`3=`**Y**`2−`**Y**`1`.

NOTIZEN

Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls werden mit dem `MAX`-Befehl im `G-Solv`-Menü die Maximalstellen der Differenzfunktion $x \longmapsto g_1(x) - f(x)$ numerisch bestimmt. Ausgabe: `X=0.5235988617` mit `Y=0.5` und `X=2.617993927` mit `Y=0.5`.

Die Differenz der Werte von f und g_1 ist im skizzierten Bereich etwa an den Stellen $x = 0{,}52$ und $x = 2{,}62$ maximal mit dem Wert 0,25.

Bemerkung:

Tatsächlich ist die Wertedifferenz an den Stellen $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$ im skizzierten Bereich maximal mit Wert 0,5. Außerhalb des skizzierten Bereichs ist die maximale Wertedifferenz 2, nämlich bei $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ für beliebige $k \in \mathbb{Z}$.

b)

1. SCHRITT: BESTIMMUNG DES PARAMETERS t

Der Schnittwinkel der Graphen von f und g_t hängt nur von den jeweiligen Steigungen im Ursprung ab, also von

$f'(0) = 0$ und $g_t'(x) = t \cdot \cos(0) = t$.

Die Tangente an G_f im Ursprung ist also die x-Achse und somit ist der Schnittwinkel α der beiden Graphen gleich dem Neigungswinkel des Graphen von g_t zur x-Achse im Punkt $(0|0)$. Für diesen Winkel gilt also

$\tan\alpha = t$ (Steigung des Graphen von g_t im Ursprung).

Um also $\alpha = 45\,°$ zu gewährleisten, muss

$t = \tan(45°) = 1$

sein. Für diesen Wert des Parameters t schneiden sich die beiden Graphen im Ursprung unter einem Winkel von 45 °.

2. SCHRITT: FLÄCHE UNTER G_f BESTIMMEN

Zunächst wird die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im skizzierten Bereich gebraucht, also

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x.$$

Mit dem `∫dx`-Befehl im `G-Solv` -Menü erhält man nach Auswahl der Funktion `Y1` und Eingabe der Untergrenze `X=0` und der Obergrenze `X=π` die Ausgabe `∫dx=1.570796327`.

NOTIZEN

3. SCHRITT: GLEICHUNG FÜR t AUFSTELLEN UND LÖSEN

Gesucht ist der Wert von t, für den

$$\int_0^\pi g_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}57$$

gilt.

Da $x \longmapsto -\cos x$ eine Stammfunktion von $x \longmapsto \sin x$ ist, folgt aus der Faktorregel, dass durch
$x \longmapsto -t \cdot \cos x$ eine Stammfunktion von g_t gegeben ist.

Also ist

$$\int_0^\pi g_t(x)\,\mathrm{d}x = [-t\cdot\cos(x)]_0^\pi = (-t\cdot(-1) - (-t)\cdot 1) = 2t.$$

Einsetzen in die grüne Gleichung liefert $2t \approx 1{,}57$, also $t \approx 0{,}785$. Für diesen Wert von t schließt also der Graph von g_t im skizzierten Bereich mit der x-Achse denselben Flächeninhalt mit der x-Achse ein, wie G_f.

Bemerkung:

Tatsächlich ist

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

und der exakte Wert von t ist $t = \frac{\pi}{4}$.

c)

1. SCHRITT: GLEICHUNG DES GESPIEGELTEN GRAPHEN BESTIMMEN

Sei $\overline{g_1}$ eine Funktion, deren Graph mit $\overline{K}$ übereinstimmt. Da G_{g_1} unterhalbe der Symmetrieachse $y = 2$ verläuft, liegt $\overline{K}$ oberhalb dieser Achse im Abstand

$\overline{g_1}(x) - 2 = 2 - g_1(x)$ an der Stelle x,

also mit dem gleichen Abstand wie die Gerade $y = 2$ zum Punkt $\left(x \middle| g_1(x)\right)$.

Auflösen dieser Symmetriebedingung (braune Gleichung) nach $\overline{g_1}(x)$ liefert die gesuchte Gleichung

$$\overline{g_1}(x) = 4 - g_1(x) = 4 - \sin x.$$

NOTIZEN

2. SCHRITT: ENGSTE STELLE DES POKALS BESTIMMEN

Die engste Stelle des Pokals ist dort, wo die durch $\overline{g_1}$ beschriebene Oberkante des im Koordinatensystem seitlich liegenden Pokals den niedrigsten y-Wert hat. Gesucht ist also die Minimalstelle von $\overline{g_1}$ im Bereich $0{,}5 \leq x \leq 5{,}2$. Aufgrund der Symmetrie ist dies genau die Maximalstelle der durch $g_1(x) = \sin x$ beschriebenen Unterkante des Pokals. Die einzige Maximalstelle der Sinusfunktion in diesem Bereich liegt bei $x = \frac{\pi}{2}$.

2. SCHRITT: FÜLLMENGE DES POKALS ERMITTELN

Um die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers anwenden zu können, muss die Drehachse mit der x-Achse übereinstimmen. Dazu muss das ganze Modell um 2 LE nach unten verschoben werden, d. h. von allen Funktionsgleichungen wird 2 abgezogen. Aus der Symmetrieachse $y = 2$ wird somit die x-Achse $y = 0$ und aus der Oberkante $\overline{g_1}(x) = 4 - \sin x$ wird $\widetilde{g_1}(x) = 2 - \sin x$. Die Volumenformel lautet nun

$$V = \pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{5{,}2} [\widetilde{g_1}(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `Y4=(2-sin(X))^2`. Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls kann über den `∫dx`-Befehl im `G-Solv`-Menü das Integral berechnet werden. Bei der Eingabe von `X=π÷2` als Untergrenze und `X=5.2` als Obergrenze wird `∫dx=18.41243983` ausgegeben. Das Volumen ist somit

$V \approx \pi \cdot 18{,}412 \approx 57{,}84$ [VE].

Umgerechnet in Kubikzentimeter entspricht das

$57{,}84 \cdot (2{,}5\ \mathrm{cm})^3 = 903{,}75\ \mathrm{cm}^3$, also etwa $0{,}9\ell$.

Somit passt ein Liter Flüssigkeit nicht in den Pokal.