NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analysis I 1

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe I 1

a)

1. SCHRITT: KOORDINATEN DES NÖRDLICHSTEN PUNKTES *N* BESTIMMEN

Der nördlichste Punkt N entspricht dem Hochpunkt des Graphen der Funktion f.

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: **Y**1=−0.1×X^3−0.3×X^2+0.4×X+3.2. Der DRAW-Befehl zeigt den Graphen an.

Der MAX-Befehl im G-Solv-Menü liefert die Ausgabe X=0.527525 und Y=3.312845108. Somit hat der nördlichste Punkt N auf zwei Nachkommastellen gerundet die Koordinaten $N(0{,}53|3{,}31)$.

2. SCHRITT: ABSTAND DER PUNKTE *N* UND *M* BESTIMMEN

Der Abstand der Punkte $M(0|0{,}5)$ und $N(0{,}53|3{,}31)$ beträgt

$$d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}53-0 \\ 3{,}31-0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(0{,}53)^2 + (3{,}31-0{,}5)^2} \approx 2{,}86.$$

Der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße ist also etwa 2,9 km von der Ortsmitte entfernt.

3. SCHRITT: ÜBERGANGSPUNKT W BESTIMMEN

Dieser Übergang findet im Wendepunkt W statt.

Eingabe im GRAPH-Modus des GTR: **Y**2=d²/dx²(**Y**1).

Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls kann im `G-Solv`-Menü die Nullstelle mit dem `ROOT`-Befehl ermittelt werden: Die Ausgabe lautet `X=-1`. Der zugehörige Funktionswert von f ergibt sich mit dem `Y-CAL`-Befehl im `G-Solv`-Menü unter Eingabe von `X=-1` zu `Y=2.6`. Der Punkt W, in dem die Umgehungsstraße von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht, hat somit die Koordinaten $W(-1|2{,}6)$.

NOTIZEN

KNICKFREIHEIT IN A NACHWEISEN

Zu zeigen ist, dass die Richtung der geraden Ortsdurchfahrt und die Richtung der Umgehungsstraße im Punkt A übereinstimmen, wo sie laut Aufgabenstellung zusammentreffen. Die Richtung des Straßenverlaufs ist durch die Steigung der zugehörigen Graphen in der Abbildung gegeben. Die Steigung der Umgehungsstraße im Punkt A ist gegeben durch den Wert der ersten Ableitung von f and der Stelle $x = -3$ (x-Koordinate von A). Die Steigung der Geraden durch A und B ist der Differenzenquotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{3-(-3)} = -0{,}5.$$

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: **Y**`3=d/dx(`**Y**`1)`.

Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls kann im `G-Solv`-Menü der Wert von f' an der Stelle $x = -3$ mit dem `Y-CAL`-Befehl unter Eingabe von `X=-3` ermittelt werden: Die Ausgabe lautet `Y=-0.5`. Also ist $f'(-3) = 0{,}5 = m$, d. h. Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße gehen ohne Knick ineinander über.

b)

1. SCHRITT: PROZENTUALER ANTEIL DER FLÄCHE BESTIMMEN

Die Gesamtfläche zwischen Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße wird durch die Fläche A_{gesamt} zwischen G_f und der Geraden in der Abbildung dargestellt. Die Gerade hat nach Teilaufgabe a) die Steigung $m = -0{,}5$ und geht durch den Punkt $A(-3|2)$, wird also durch die Funktion $g: x \longmapsto -0{,}5x + 0{,}5$ beschrieben.

Da G_f oberhalb von G_g verläuft und die Schnittpunkte der beiden Graphen (A und B) bei $x = -3$ und $x = 3$ liegen, ist

$$A_{\text{gesamt}} = \int_{-3}^{3} \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x.$$

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: **Y**`4=`**Y**`1+0.5×X-0.5`.

NOTIZEN

Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls kann im `G-Solv`-Menü mit dem `∫dx`-Befehl unter Eingabe von `X=-3` als Untergrenze und `X=3` als Obergrenze der Integralwert bestimmt werden. Ausgabe: `∫dx=10.8`.

Die Gesamtfläche zwischen Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße beträgt somit etwa 10,8 km^2. Davon liegt der in der Abbildung grau schattierte Halbkreis im Gemeindegebiet, das entspricht einer Fläche von

$$A_{\text{Gemeinde}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot (1{,}5\ \text{km}^2) \approx 3{,}53\ \text{km}^2.$$

Der Anteil des Gemeindegebiets an der Gesamtfläche ist somit

$$\frac{A_{\text{Gemeinde}}}{A_{\text{gesamt}}} \approx \frac{3{,}53\ \text{km}^2}{10{,}8\ \text{km}^2} \approx 32{,}7\ \%.$$

Dementsprechend liegen etwa $1 - 32{,}7\ \% = 67{,}2\ \%$ der Fläche außerhalb des Gemeindegebiets.

c)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass der Autofahrer die Windkraftanlage einmal genau vor sich und zweimal genau hinter sich hat. Sei $\mathrm{S}(\mathrm{x_S}|\mathrm{y_S})$ der gesuchte Punkt auf der Umgehungsstraße, von dem aus der Autofahrer die Windkraftanlage direkt vor sich hat.

Da das Auto vom Punkt B aus nach Nordwesten fährt, liegt der Punkt $\mathrm{P}(1{,}5|3)$ nur dann vor ihm, wenn seine x-Koordinate größer als 1,5 ist. Da sich das Fahrzeug auf der Umgehungsstraße bewegt, die durch den Graphen von f beschrieben wird, gilt $\mathrm{y_S} = \mathrm{f}(\mathrm{x_S})$.

Die Bedingung, dass der Autofahrer die Windkraftanlage in Fahrtrichtung vor sich hat, bedeutet, dass die Strecke SP tangential an $\mathrm{G_f}$ anliegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Steigung dieser Strecke mit der Steigung von f an der Stelle $\mathrm{x_S}$ übereinstimmt.

Die Steigung von SP ist gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S} = \frac{3 - f(x_S)}{1{,}5 - x_S}.$$

Die Steigung von f an der Stelle $\mathrm{x_S}$ ist gegeben durch $\mathrm{f}'(\mathrm{x_S})$.

Die x-Koordinate des gesuchten Punktes S ist somit die Lösung der Gleichung

$$\frac{3 - \mathrm{f}(\mathrm{x_S})}{1{,}5 - \mathrm{x_S}} = \mathrm{f}'(\mathrm{x_S}) \text{ für } \mathrm{x_S} > 1{,}5.$$

NOTIZEN

1. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR: `Y5=(3-Y1)÷(1.5-X)`.

Nach Ausführen des `DRAW`-Befehls können im `G-Solv`-Menü mit dem `ISCT`-Befehl unter Auswahl von `Y3` und `Y5` die Schnittstellen der Funktionen $x \longmapsto \frac{3-f(x)}{1{,}5-x}$ und f' bestimmt werden. Die einzige, die im gewünschten Bereich $x > 1{,}5$ angegeben wird, ist bei $x = 2$.

Der zugehörige Funktionswert von f wird mit dem `Y-CAL`-Befehl unter Eingabe von `X=2` ermittelt. Die Ausgabe lautet `Y=2`.

Der gesuchte Punkt S hat also die Koordinaten $S(2|2)$.

d)

1. SCHRITT: PUNKT U MIT FAHRTRICHTUNG PARALLEL ZUR ORTSDURCHFAHRT BESTIMMEN

Sei $U(x_U|y_U)$ der gesuchte Punkt auf der Umgehungsstraße, bei dem die Fahrtrichtung parallel zur Ortsdurchfahrt verläuft. Wegen $U \in G_f$ ist $y_U = f(x_U)$. Die Parallelitätsbedingung bedeutet, dass die Steigung von f bei $x = x_U$ genau der Steigung der Geraden AB entspricht. Erstere ist $f'(x_U)$ und letztere ist $m = -0{,}5$, wie in Teilaufgabe a) berechnet.

Es ist also die Gleichung $f'(x) = -0{,}5$ zu lösen. Ausführen des `DRAW`-Befehls kann im `G-Solv`-Menü mit dem `X-CAL`-Befehl unter Eingabe des gewünschten Wertes `Y=-0.5` der zugehörige x-Wert berechnet werden. Es werden `X=-3` und `X=1` angegeben. Der erste Wert entspricht dem Punkt A, wo Umgehungsstraße und Ortsdurchfahrt zusammen kommen; der andere ist x_U. Der zugehörige Funktionswert wird mit dem `Y-CAL`-Befehl unter Eingabe von `X=1` ermittelt. Ausgabe: `Y=3.2`. Der gesuchte Punkte hat also die Koordinaten $U(1|3{,}2)$.

2. SCHRITT: MAXIMALEN ABSTAND VON DER ORTSDURCHFAHRT BESTIMMEN

Fährt jemand vom Punkt A aus auf der Umgehungsstraße nach B, so nimmt seine Entfernung zur Ortsdurchfahrt zu, wenn die Steigung von f größer als die Steigung $m = -0{,}5$ der Gerade AB ist, die die Ortsdurchfahrt darstellt. Ein Blick auf den Graphen von f', der mit dem `DRAW`-Befehl im GTR angezeigt wird, zeigt, dass dies bis zur Stelle $x = 1 = x_U$ der Fall ist. Für $x > 2$ ist die Steigung von f kleiner als $-0{,}5$, so dass sich der Autofahrer wieder der Ortsdurchfahrt nähert. Den maximalen Abstand hat er somit im Punkt $U(1|3{,}2)$.

Um den Abstand des Punktes U von der Geraden AB zu bestimmen, wird die Gerade gebraucht, die senkrecht auf AB steht und den Punkt U enthält. Sei

NOTIZEN

L der Schnittpunkt dieser Geraden mit AB. Da AB und LU senkrecht aufeinander stehen, ist das Produkt ihrer Steigungen -1. Ist also m' die Steigung der Gerade LU, so gilt $mm' = -1$, wobei $m = -0{,}5$ die Steigung der Geraden AB ist, die in Teilaufgabe a) bestimmt wurde. Somit ist $m' = 2$ und

$$h(x) = 2x + c$$

eine Gleichung für LU, für geeignetes $c \in \mathbb{R}$. Da der Punkt $U(1|3{,}2)$ auf LU liegt, gilt

$$3{,}2 = 2 \cdot 1 + c \Longrightarrow c = 1{,}2$$
$$\Longrightarrow h(x) = 2x + 1{,}2.$$

Der Punkt $L(x_L|y_L)$ ist der Schnittpunkt von AB und LU, d. h. seine Koordinaten erfüllen beide Geradengleichungen:

$$\begin{aligned}
&y_L = -0{,}5 \cdot x_L + 0{,}5 \text{ da } L \text{ auf } AB;\\
&y_L = 2 \cdot x_L + 1{,}2 \text{ da } L \text{ auf } LU.\\
&\Longrightarrow -0{,}5 \cdot x_L + 0{,}5 = 2 \cdot x_L + 1{,}2\\
&\Longrightarrow 2{,}5 \cdot x_L = -0{,}7\\
&\Longrightarrow x_L = -\frac{0{,}7}{2{,}5} = -0{,}28.
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung für (grüne Gleichung) liefert das

$$y_L = -0{,}5 \cdot (-0{,}28) + 0{,}5 = 0{,}64.$$

Somit ist $L(-0{,}28|0{,}64)$ der Lotfußpunkt des Lotes von U auf AB und der Abstand von U zu AB ist

$$\begin{aligned}
d(U, AB) = d(U, L) = |\overrightarrow{LU}| &= \left|\begin{pmatrix} 1-(-0{,}28) \\ 3{,}2-0{,}64 \end{pmatrix}\right|\\
&= \sqrt{1{,}28^2 + 2{,}56^2} \approx 2{,}86.
\end{aligned}$$

Die Umgehungsstraße hat also die maximale Entfernung von etwa 2,86 km von der Ortsdurchfahrt.