NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil:
Analytische Geometrie II 2

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe II 2

a)

1. SCHRITT: IN EINER MINUTE VON U₁ ZURÜCKGELEGTE STRECKE BESTIMMEN

Die in einer Minute zurückgelegte Strecke des ersten U-Boots in Metern ist der Betrag des Richtungsvektors, also

$$\left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-60)^2+(-90)^2+(-30)^2} = 30\sqrt{14} \approx 112{,}2$$

$\Longrightarrow$ Pro Minute bewegt sich U_1 etwa 112 m.

2. SCHRITT: BEWEGUNGSRICHTUNG VON U₁ BEGRÜNDEN

Das U-Boot U_1 entfernt sich von der Meeresoberfläche, weil die x_3-Komponente des Richtungsvektors negativ ist, d. h. für zunehmendes t wird die x_3-Koordinate von U_1 kleiner.

3. SCHRITT: WINKEL ZWISCHEN DER ROUTE VON U₁ UND DER MEERESOBERFLÄCHE BESTIMMEN

Um die Formel zur Schnittwinkelberechnung einer Ebene mit einer Geraden anzuwenden wird zum einen ein Richtungsvektor der Bahn von U_1 (der Einfachheit halber $\frac{1}{-30}\cdot\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$) und zum anderen ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene gebraucht, z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

NOTIZEN

Für den Schnittwinkel α gilt

$$\sin(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \right| = \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Also ist $\alpha \approx 15{,}5\,°$, d. h. die Route von U_1 bildet mit der Meeresoberfläche einen Winkel von etwa 15,5 °.

b)

1. SCHRITT: GESCHWINDIGKEIT VON U₂ ERMITTELN

In den ersten drei Minuten legt U_2 die Strecke

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| - \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix}\right| = 630\ [\mathrm{m}]$ zurück. Das entspricht einer Geschwindigkeit von $\frac{630\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{min}} = 210 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$.

2. SCHRITT: GLEICHUNG FÜR U₂ BEGRÜNDEN

Die Route von U_2 geht durch die Punkte A und B, also kann $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor einer Parametergleichung dienen. Damit aber der Parameter t der Zeit in Minuten nach Beobachtungsbeginn entspricht, muss der Richtungsvektor die Verschiebung darstellen, die in *einer* Minute vonstattengeht, also $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (die Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ dauert nämlich 3 Minuten). So ergibt sich

$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$, wie angegeben.

3. SCHRITT: ZEITPUNKT GLEICHER TIEFE BESTIMMEN

Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die x_3-Koordinaten für beide U-Boote übereinstimmen, also das $t \geq 0$ mit

$-170 - 30t = -68 - 60t \Leftrightarrow 30t = 102.$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $t = 3{,}4$.

$\Longrightarrow$ Nach 3,4 Minuten sind beide U-Boote in der gleichen Tiefe.

NOTIZEN

c)

1. SCHRITT: ABSTAND DER BOOTE BEI BEOBACHTUNGSBEGINN BERECHNEN

Position von U_1 zum Zeitpunkt $t = 0$: $\begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix}$.

Position von U_2 zum Zeitpunkt $t = 0$: $\begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix}$.

Entfernung von U_1 zu U_2 zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 72 \\ -30 \\ -102 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{72^2 + (-30)^2 + (-102)^2} \\ &= \sqrt{16488} \\ &\approx 128{,}4. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der Abstand der beiden U-Boote beträgt zu Beobachtungsbeginn etwa 128 m.

2. SCHRITT: PRÜFEN, OB DER SICHERHEITSABSTAND EINGEHALTEN WIRD

Der Differenzvektor der beiden Positionen zu einem beliebigen, bei beiden U-Booten gleichen, Zeitpunkt t ist

$$\begin{pmatrix} 140 - 60t - (68 - 90t) \\ 105 - 90t - (135 - 180t) \\ -170 - 30t - (-68 - 60t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 + 30t \\ -30 + 90t \\ -102 + 30t \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors soll stets mindestens 100 sein.

Dieser ist in Abhängigkeit von t gegeben durch die Funktion

$$d: t \longmapsto \sqrt{(72 + 30t)^2 + (-30 + 90t)^2 + (-102 + 30t)^2}.$$

Eingabe im `GRAPH`-Modus des GTR:
Y`1=√((72+30×X)^2+(-30+90×X)^2+(-102+30×X)^2)`. Der `DRAW`-Befehl zeigt den Graphen an, anschließend kann man mit dem `MIN`-Befehl im `G-Solv`-Menü das Minimum bestimmen lassen: Die Ausgabe lautet

`X=0.363636` und `Y=123.2027154`.

Somit beträgt der minimale Abstand der beiden U-Boote etwas mehr als 123 m, d. h. der Sicherheitsabstand von 100 m wird eingehalten.

NOTIZEN

Bemerkung:

Der exakte Minimalabstand ist $6\sqrt{\frac{4638}{11}}$ und wird zum Zeitpunkt $t = \frac{4}{11}$ erreicht. Die Routen der beiden U-Boote haben einen Minimalabstand von $\frac{276}{\sqrt{10}} \approx 87{,}28$, das ist der Abstand der Position von U_1 zum Zeitpunkt $t = 6{,}72$ zur Position von U_2 zum Zeitpunkt $t = 3{,}68$.

d)

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKT DER EBENEN PROJEKTIONEN DER ROUTEN BERECHNEN

Die Projektion der Route von U_1 auf die x_1x_2-Ebene hat die Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$. Diejenige von U_2 lautet

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

Der Schnittpunkt dieser ebenen Geraden ergibt sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &\text{I: } 140 - 60r = 68 - 90s \\ &\text{II:} 105 - 90r = 135 - 180s. \end{aligned}$$

Vereinfacht lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{I: } -60r + 90s = -72 \\ &\text{II: } -90r + 180s = 30. \end{aligned}$$

Die Option `Simultaneous` im `EQUA`-Modus des GTR unter Angabe der Anzahl `2` der Unbekannten erlaubt die Eingabe der Koeffizienten dieser Gleichungen: `a1=-60`, `b1=90`, `c1=-72`, `a2=-90`, `b2=180` und `c2=30`.

Der `SOLV`-Befehl liefert die Näherungslösung $r = 5{,}8$ und $s = 3{,}0666$.

Die Tiefe von U_1 zum Zeitpunkt $r = 5{,}8$ ist

$$-170 - 30 \cdot 5{,}8 = -344$$

und die Tiefe von U_2 zum Zeitpunkt $s = 3{,}0666$ ist

$$-68 - 60 \cdot 3{,}0666 = -251{,}996.$$

Somit ist der Höhenunterschied an dieser Stelle etwa
$-252\text{ m} — 344\text{ m} = 92\text{ m}.$

Bemerkung:

Die exakte Lösung des obigen linearen Gleichungssystems ist $r = 5{,}8$ und $s = \frac{46}{15}$ und der zugehörige Höhenunterschied beträgt tatsächlich genau 92 m.