NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analytische Geometrie II 1

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe II 1

a)

1. SCHRITT: AUFSTELLEN DER KOORDINATENGLEICHUNG FÜR E

Die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ von je zwei der drei vorgegebenen Punkte auf der Ebene dienen als Spannvektoren (Richtungsvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor von E errechnet sich als Kreuzprodukt dieser zwei Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2{,}5 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2{,}5 \\ (-4) \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Teilen durch 5 ergibt den einfacheren Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Komponenten dieses Vektors sind die Koeffizienten einer Koordinatengleichung für E, d. h.

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes A der Ebene in diese Gleichung liefert

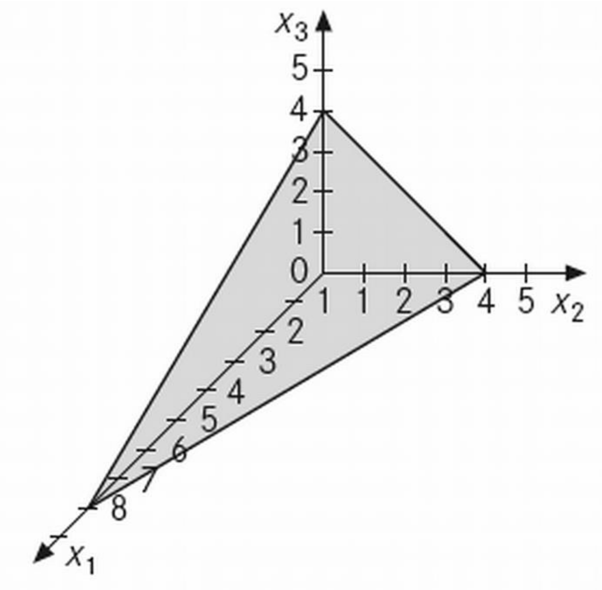
$6 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = c \Longrightarrow c = 8.$

Somit ist $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$ eine vollständige Koordinatengleichung für E.

NOTIZEN

2. SCHRITT: EBENE IM KOORDINATENSYSTEM DARSTELLEN

Die Spurpunkte der Ebene E errechnen sich mit Hilfe der Koordinatengleichung zu $S_1(8|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|4)$.



3. SCHRITT: SCHNITTWINKEL α DER EBENE *E* MIT DER x_1-ACHSE BESTIMMEN

Die x_1-Achse hat als Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Formel zur Schnittwinkelberechnung einer Ebene mit einer Geraden besagt

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{n} \circ \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Der Schnittwinkel beträgt somit $\alpha \approx 19{,}5\,°$.

b)

1. SCHRITT: NACHWEISEN, DASS DAS DREIECK *ABP* GLEICHSCHENKLIG IST

Die Skizze legt nahe, dass die Seiten AP und BP gleich lang sind. Es ist

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, also

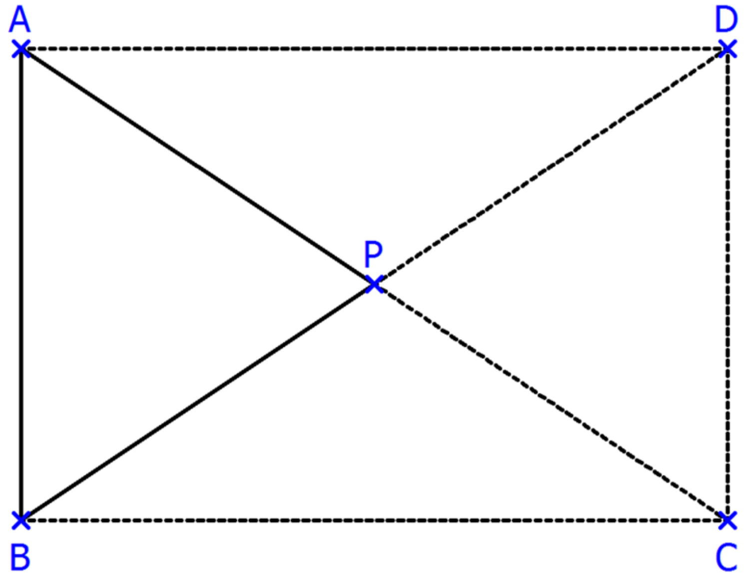
$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (2{,}5)^2} = \sqrt{16{,}25}$ und

$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2{,}5)^2} = \sqrt{16{,}25}$.

Also sind die genannten Seiten des Dreiecks ABP gleich lang, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig.

NOTIZEN

2. SCHRITT: ECKEN *C* UND *D* DES RECHTECKS BESTIMMEN



Da P der Mittelpunkt der Diagonalen AC ist, gilt $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Somit ist

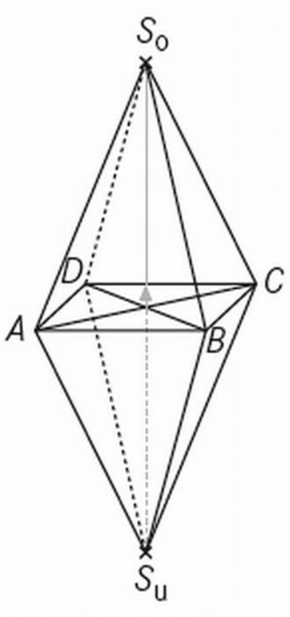
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow C(0|-1|5).$$

Da P der Mittelpunkt der Diagonalen BD ist, gilt $\overrightarrow{BD} = 2 \cdot \overrightarrow{BP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow D(4|-3|5).$$

3. SCHRITT: BESTIMMUNG DER PYRAMIDENSPITZEN S_O UND S_U

Da es sich um senkrechte Pyramiden handelt, liegen die Spitzen auf der Gerade durch den Mittelpunkt P der Grundfläche, die senkrecht auf dieser Grundfläche steht.



NOTIZEN

Als Richtungsvektor dieser Gerade ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E geeignet, in der die gemeinsame Grundfläche der Pyramiden liegt. Wie oben berechnet hat dieser Vektor den Betrag $|\vec{n}| = 3$. Um ihn also auf 12 LE zu strecken, müssen wir ihn mit dem Faktor 4 multiplizieren. Die Spitzen der beiden Pyramiden der Höhe 12 erreicht man vom Punkt P aus durch addieren bzw. subtrahieren von $4 \cdot \vec{n}$:

$$\overrightarrow{OS_o} = \overrightarrow{OP} + 4 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{OS_u} = \overrightarrow{OP} - 4 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $S_o(7|8|,5)$ und $S_u(-1|-8|-5{,}5)$.

c)

1. SCHRITT: PUNKTE AUF DER x_1-ACHSE BESTIMMEN, DIE MIT *A* UND *B* EIN RECHTWINKLIGES DREIECK BILDEN

Sei L ein Punkt auf der x_1-Achse, der die gewünschte Eigenschaft hat. Da L auf der x_1-Achse liegt, hat er die Koordinaten $L(l_1|0|0)$ für geeignetes $l_1 \in \mathbb{R}$. Da AB die Hypotenuse des Dreiecks ABL sein soll, müssen die Schenkel LA und LB senkrecht aufeinander stehen, d. h.

$$\overrightarrow{LA} \circ \overrightarrow{LB} = 0.$$

NOTIZEN

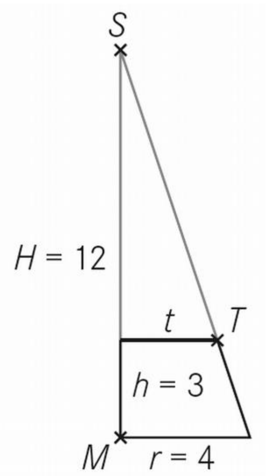
Dabei ist $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - l_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - l_1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit lautet die grüne Orthogonalitätsbedingung $\begin{pmatrix} 6 - l_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 - l_1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, d. h. $(6 - l_1)(2 - l_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow l_1^2 - 8l_1 + 15 = 0$.

Im `EQUA`-Modus des GTR kann man den Gleichungstyp `Polynomial` wählen, den Grad `2` angeben und dann nacheinander die Koeffizienten der Gleichung `a=1`, `b=-8` und `c=15` eingeben. Der `Solv`-Befehl liefert dann die Lösungen $l_1 = 3$ und $l_1 = 5$.

Die gesuchten Punkte haben somit die Koordinaten $(3|0|0)$ und $(5|0|0)$.

d)

1. SCHRITT: SENKRECHTEN SCHNITT DES KEGELS SKIZZIEREN



Die Höhe des Kegels ist die Entfernung der Spitze zum Grundkreismittelpunkt, also $H = \left|\overrightarrow{(MS)}\right| = 12$, der Radius des Grundkreises ist mit $r = 4$ vorgegeben. Der Punkt $R(2|2|3)$ liegt auf der Höhe $h = 3$ über dem Grundkreis. Um festzustellen, ob R innerhalb des Kegels liegt oder nicht, müssen wir dessen Abstand zur Symmetrieachse MS mit dem entsprechenden Abstand t eines Punktes T auf dem Kegelmantel vergleichen, der auf derselben Höhe $h = 3$ liegt, wie R.

Nach dem 2. Strahlensatz ist

$$\frac{t}{4} = \frac{(12-3)}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 3.$$

Ist also R mehr als 3 LE von der Symmetrieachse entfernt, so liegt R außerhalb des Kegels, ansonsten innerhalb.

Der Punkt auf der Gerade MS, der R am nächsten liegt, ist $(0|0|3)$ (auf der gleichen Höhe $h = 3$ wir R). Der Abstand von R zur Gerade MS ist somit

$$d(R, MS) = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3.$$

Somit liegt der Punkt R innerhalb des Kegels.

NOTIZEN