Abitur Mathematik: Musterlösung

# Pflichtteil

## Baden-Württemberg 2012

Im Pflichtteil sind keine Hilfsmittel zugelassen.

## Aufgabe 1

1. SCHRITT: STRUKTUR DER FUNKTION BESCHREIBEN

Der Funktionsterm von $f$ ist die Verkettung der Potenzfunktion $g(x) = x^5$ mit einer nach oben verschobenen Sinusfunktion $h(x) = \sin x + 7$.

2. SCHRITT: RECHENREGELN ANWENDEN

Da $f$ eine Verkettung ist, wird die Kettenregel benötigt.

**Kettenregel:** $f(x) = g\big(h(x)\big) \Longrightarrow f'^{(x)} = g'^{(h(x))} \cdot h'(x)$ mit $g(x) = x^5$ und $h(x) = \sin x + 7 \Longrightarrow h'(x) = \cos x$.

Da $g$ eine Potenzfunktion ist, wird $g'$ mit der Potenzregel gebildet:

**Potenzregel:** $g(x) = x^n \Longrightarrow g'(x) = n \cdot x^{n-1}$ mit $n = 5$
$\Longrightarrow g'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$.

$\Longrightarrow g'(x) = 5x^4$.

Einsetzen von $g'(x)$ und $h'(x)$ in die grüne Formel liefert

$f'(x) = 5(\sin x + 7)^4 \cdot \cos x = 5 \cos x\, (\sin x + 7)^4$.

## Aufgabe 2

1. SCHRITT: VERSCHACHTELUNGSTYP ERKENNEN

Der Funktionsterm von $f$ ist die Summe aus einer Verkettung und einer Potenzfunktion (mit negativem Exponenten).

2. SCHRITT: INTEGRATIONSREGELN ANWENDEN

Nach der Summenregel ist eine Stammfunktion von $f$ gegeben durch die Summe von Stammfunktionen der zwei Summanden.

Die $e$-Funktion $x \longmapsto 2e^{4x}$ (1. Summand) ist eine Verkettung aus der einfacheren Funktion $g(x) = 2e^x$ und der linearen Funktion $x \longmapsto 4x$. Da die natürliche Exponentialfunktion ihre eigene Stammfunktion ist, gilt dasselbe für $g$ (wegen der Faktorregel), d. h. $G(x) = 2e^x$ ist eine Stammfunktion von $g$.

Regel der linearen Substitution:

$G$ Stammfunktion von $g \Longrightarrow x \longmapsto \frac{1}{a} G(ax+b)$ Stammfunktion von $x \longmapsto g(ax+b)$.

In unserem Fall ($a = 4$, $b = 0$) heißt das: $x \longmapsto \frac{1}{4} G(4x) = \frac{1}{2} e^{4x}$ ist eine Stammfunktion von $x \longmapsto g(4x) = 2e^{4x}$.

Der zweite Summand $x \longmapsto \frac{3}{x^2}$ wird mit der Potenzregel integriert.

Potenzregel:

Für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ist $x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $x \longmapsto x^n$.

In unserem Fall ($n = -2$) heißt das: $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ ist eine Stammfunktion von $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, also ist nach der Faktorregel $x \longmapsto -\frac{3}{x}$ eine Stammfunktion des zweiten Summanden $x \longmapsto \frac{3}{x^2}$.

Eine Stammfunktion $F$ von $f$ ist nach der Summenregel gegeben durch die Summe der grün gekennzeichneten Stammfunktionen der einzelnen Summanden von $f$, also $F(x) = \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x}$.

## Aufgabe 3

1. SCHRITT: GLEICHUNGSTYP ERKENNEN

Es handelt sich um eine Nullstellengleichung für eine Summe von trigonometrischen Funktionen.

2. SCHRITT: FUNKTIONSTERM ALS PRODUKT SCHREIBEN

Der gemeinsame Faktor $\cos(x)$ kann nach dem Distributivgesetz ausgeklammert werden. Dadurch entsteht ein Produkt:
$\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = \cos(x) \cdot (\sin(x) - 2)$.

Die neue Gleichung lautet somit $\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$.

3. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

Ein Produkt wird genau dann null, wenn einer der Faktoren null wird.

Der erste Faktor $\cos(x)$ hat im zu untersuchenden Intervall die bekannten Nullstellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Der zweite Faktor $(\sin(x) - 2)$ kann nie null werden, denn es gilt $\sin(x) \leq 1$ und daher $\sin(x) - 2 \leq 1 - 2 = -1 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die einzigen Lösungen der Gleichung im Intervall $[0; 2\pi]$ lauten damit $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

## Aufgabe 4

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE BESTIMMEN

| | |
|---|---|
| $f(x) = g(x)$ | Funktionsterme einsetzen |
| $\frac{2}{x} = 2x - 3$ | $\| \cdot x$ |
| $2 = 2x^2 - 3x$ | $\| -2$; Seiten vertauschen |
| $2x^2 - 3x - 2 = 0$ | Quadratische Lösungsformel |
| $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4}$ | vereinfachen |
| $x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$ | |

Die Lösungen sind also $x = -\frac{1}{2}$ und $x = 2$.

An diesen Stellen haben die Funktionen $f$ und $g$ denselben Wert, nämlich $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 = g\left(-\frac{1}{2}\right)$ und $f(2) = \frac{2}{2} = 1 = g(2)$.

Somit lauten die gemeinsamen Punkte der Funktionsgraphen $P(-0{,}5|-4)$ und $Q(2|1)$.

2. SCHRITT: PRÜFEN, OB DIE SCHNITTWINKEL 90 ° BETRAGEN

Der Schnittwinkel der zwei Graphen $G_f$ und $G_g$ im Punkt $(p_1|p_2)$ beträgt genau dann 90 °, wenn die Bedingung $f'(p_1) \cdot g'(p_1) = -1$ erfüllt ist. Dabei ist $f'(x) = (2 \cdot x^{-1})' = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ und $g'(x) = 2$.

Im Punkt $P(-0{,}5|-4)$ gilt $f'(-0{,}5) \cdot g'(-0{,}5) = -\frac{2}{0{,}5^2} \cdot 2 = -16 \neq -1$, also schneiden sich die Graphen in diesem Punkt nicht senkrecht.

Im Punkt $Q(2|1)$ gilt $f'(2) \cdot g'(2) = -\frac{2}{2^2} \cdot 2 = -1$, also schneiden sich die Graphen in diesem Punkt senkrecht.

## Aufgabe 5

*a)*

1. SCHRITT: EIN EINFACH ZU ERKENNENDES UNTERSCHEIDUNGSMERKMAL FINDEN

Die abgebildeten Graphen haben folgende $y$-Achsenabschnitte:

Abb. 1: $(0|1)$

Abb. 2: $(0|-2)$

Abb. 3: $(0|1)$

Abb. 4: $(0|-4)$.

2. SCHRITT: MERKMAL AM FUNKTIONSTERM PRÜFEN

Es ist $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$. Der $y$-Achsenabschnitt des Graphen $G_f$ ist demnach der Punkt $(0|-2)$. Somit kann es sich nur um Abb. 2 handeln.

*b)*

1. SCHRITT: VERSCHIEBUNG IN x-RICHTUNG ERKENNEN

Der Übergang vom Funktionsterm $f(x)$ zum Funktionsterm $g(x) = f(x-a)$ bedeutet eine Verschiebung des Graphen $G_f$ um $a$ Einheiten in positive $x$-Richtung. Abb. 4 geht aus Abb. 2 durch Verschiebung des Graphen um 2 Einheiten nach rechts hervor. Da Abb. 2 den Graphen von $f$ zeigt, handelt es sich bei Abb. 4 um den Graphen der Funktion $x \longmapsto f(x-2)$, d. h. $G_g$ wird in Abb. 4 für den Parameter $a = 2$ gezeigt.

2. SCHRITT: STAUCHUNG IN y-RICHTUNG ERKENNEN

Der Übergang vom Funktionsterm $f(x)$ zum Funktionsterm $h(x) = b \cdot f(x)$ bedeutet eine Streckung des Graphen $G_f$ um den Faktor $b$ in $y$-Richtung. Streckung um einen negativen Faktor bedeutet Streckung um dessen Betrag mit anschließender Spiegelung an der $x$-Achse. Streckung um einen Faktor zwischen 0 und 1 bedeutet Stauchung. Abb. 3 zeigt den einzigen der vier Graphen, bei dem zuerst der Hochpunkt und dann der Tiefpunkt kommt. Vertauschung der Rollen von Hoch- und Tiefpunkten ist ein Kennzeichen einer Spiegelung an der $x$-Achse. Der vertikale Abstand der beiden Extremstellen beträgt 2 in Abb. 3, in den anderen Abbildungen stets 4. Somit geht der Graph in Abb. 3 aus dem Graphen in Abb. 2 durch Streckung um den Faktor $-1/2$ hervor, d. h. Abb. 3 zeigt $G_h$ für den Parameter $b = -\frac{1}{2}$.

*c)*

Der in Abb. 1 dargestellte Graph geht aus $G_f$ durch Verschiebung um 3 Einheiten in positive $y$-Richtung hervor. Der zugehörige Funktionsterm lautet somit $k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$.

## Aufgabe 6

1. SCHRITT: ANGABE DER EBENE E IN KOORDINATENFORM

Ausmultiplizieren der Ebenengleichung $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} = 0$ liefert

$E: 4(x_1 - 1) - 1(x_2 - 2) + 2(x_3 - 1) = 0,$

oder vereinfacht

$E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4.$

2. SCHRITT: SCHNITTGERADE PARAMETRISIEREN

Die Koordinate $x_3$ wird als Laufparameter benutzt. Die Ebenengleichung von $F$ erlaubt es, die Koordinate $x_2$ durch den Parameter $r = x_3$ auszudrücken:

$x_2 + 2x_3 = 8 \Longrightarrow x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2r.$

Die Koordinate $x_1$ wird mit Hilfe der Koordinatengleichung von $E$ durch $x_2$ und $x_3 = r$ ausgedrückt:

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - 2x_3) = \frac{1}{4}(4 + x_2 - 2r).$$

Einsetzen der grünen Gleichung in diese letzte Gleichung liefert

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + 8 - 2r - 2r) = \frac{1}{4}(12 - 4r) = 3 - r$$

Jetzt sind alle drei Koordinaten der Schnittgeraden $g$ durch den Parameter $r$ ausgedrückt. Zusammengesetzt ergibt das die Parametergleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-r\\8-2r\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

für die Schnittgerade $g$ der Ebenen $E$ und $F$.

**Bemerkung:**

Es ist nicht immer möglich, jede beliebige Koordinate als Laufparameter für die Schnittgerade zu wählen, weil sich die anderen Koordinaten mit Hilfe der Ebenengleichungen nicht immer durch die gewählte Koordinate ausdrücken lassen. Es dauert aber länger, die Koordinaten vorab auf Eignung zu prüfen, als ggf. alle nacheinander auszuprobieren.

## Aufgabe 7

*a)*

1. SCHRITT: BESONDERE LAGE DER EBENE IM KOORDINATENSYSTEM BESCHREIBEN

Die $x_2$-Koordinate taucht in der Ebenengleichung von $E$ nicht auf. Deswegen liegt $E$ parallel zur $x_2$-Achse, denn der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ der $x_2$-Achse steht senkrecht auf dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ von $E$:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

*b)*

1. SCHRITT: LOTGERADE VON $A$ AUF $E$ BESTIMMEN

Sei $A'$ der Bildpunkt von $A$ unter der Spiegelung an der Ebene $E$. Die Gerade $g$ durch $A$ und $A'$ steht senkrecht auf $E$, also können wir den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ von $E$ als Richtungsvektor von $g$ wählen. Als Aufpunkt dient der Punkt $A(1|1|3)$. Somit ergibt sich die Parametergleichung

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: SCHNITTPUNKT DER LOTGERADE MIT $E$ BESTIMMEN

Der Mittelpunkt $M$ der Strecke $[AA']$ ist der Schnittpunkt von $g$ und $E$, der sich durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts in die Ebenengleichung ergibt:

$P_\lambda = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\3-\lambda\end{pmatrix}$ in $E: x_1 - x_3 - 4 = 0$ eingesetzt liefert

$$1 + \lambda - (3 - \lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow -6 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Einsetzen dieses Parameters in die Geradengleichung für $g$ liefert den Schnittpunkt $M$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}.$$

**3. SCHRITT: BILDPUNKT BERECHNEN**

Der Spiegelpunkt $A'$ ist von $A$ genau doppelt so weit entfernt, wie vom Mittelpunkt $M$:

$$\overrightarrow{AA'} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}.$$

Damit ist der Ortsvektor des Bildpunkts $A'$

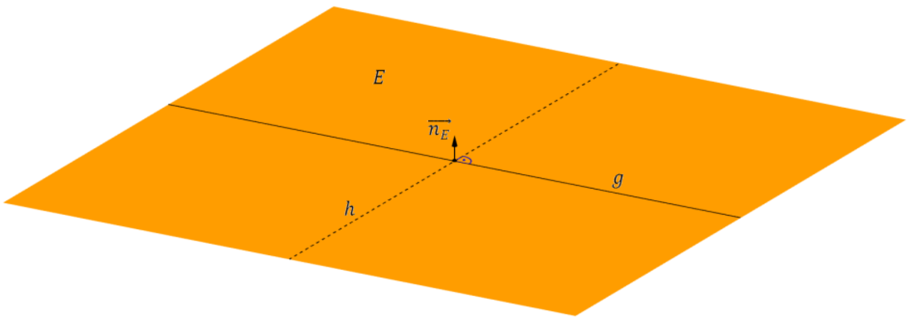
$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Spiegelpunkt $A'$ hat somit die Koordinaten $A(7|1|-3)$.

## Aufgabe 8

**1. SCHRITT: SKIZZE ANFERTIGEN**

Die Ebene $E$ und die Geraden $g$ und $h$ sollen folgende gegenseitige Lage einnehmen:




Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor von $E$.

**2. SCHRITT: NORMALENVEKTOR DER EBENE BESTIMMEN**

Ein Richtungsvektor der Geraden $h$ lässt sich aus einem Richtungsvektor $\vec{w}$ von $g$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$ von $E$ berechnen. Letzteren kann man aus einer Koordinatengleichung von $E$ ablesen oder aus den zwei Spannvektoren einer Parametergleichung von $E$ ermitteln (als Kreuzprodukt der Spannvektoren oder durch Lösen des linearen Gleichungssystems, das sich aus der Orthogonalität von $\vec{n}$ zu den Spannvektoren ergibt).

**3. SCHRITT: RICHTUNGSVEKTOR DER GERADEN *h* BESTIMMEN**

Einen Richtungsvektor $\vec{v}$ von $h$ bestimmt man aus einem Richtungsvektor von $g$ und einem Normalenvektor von $E$ genauso, wie man einen

Normalenvektor aus zwei Spannvektoren einer Ebene bestimmt:

entweder als Kreuzprodukt $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{n}$ oder durch Lösen des linearen Gleichungssystems, das sich aus der Bedingungen $\vec{v} \circ \vec{w} = 0$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$ ergibt.

#### 4. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG VON *h* ANGEBEN

Als Aufpunkt der Geraden $h$ kann man einen beliebigen Punkt auf $g$ wählen, z. B. dessen Aufpunkt $A$. Mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ des Aufpunkts und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ ergibt sich die Parametergleichung

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \vec{v}, \mu \in \mathbb{R}$$

von $h$.