

Wie du mit den Formeln für den waagrechten Wurf rechnest

Aufgabe

- Ein Jäger schießt einen Pfeil mit $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ von einem 85 m hohen Turm ab. Berechne, wie weit der Pfeil fliegt und wie lange es dauert, bis der Pfeil auf den Boden auftrifft.
- Laut einer Sage hat ein großer Elbenkönig von einem 80 m hohen Turm dem Anführer des Orkheeres, welcher 444 m entfernt gestanden haben soll, einen Warnschuss direkt vor die Füße geschossen. Berechne, mit welcher Geschwindigkeit er seinen Pfeil abgeschossen haben muss.
- Finde weitere Situationen aus deinem Alltag, die du mit einem waagrechten Wurf beschreiben kannst.

Teilaufgabe a

Ein Jäger schießt einen Pfeil mit $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ von einem 85 m hohen Turm ab. Berechne, wie weit der Pfeil fliegt und wie lange es dauert, bis der Pfeil auf den Boden auftrifft.

Schritt 1: Finde, was gegeben und gesucht ist

Zunächst sollst du herausfinden, was in dieser Aufgabe gegeben und was gesucht ist. Du kannst der Aufgabe entnehmen, dass sowohl die Flugweite des Pfeils, als auch seine Flugdauer gesucht sind. Die Geschwindigkeit des Pfeils und seine Abschusshöhe auf dem Turm sind aber wiederum gegeben. Es folgt somit:

Gegeben:

$$\text{Geschwindigkeit des Pfeils: } v = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\text{Höhe des Turms: } s_y = 85 \text{ m}$$

Gesucht:

Flugweite s_x

Flugdauer t

Schritt 2: Finde die richtige Formel

Wenn du einen Pfeil von einem Turm schießt, so fliegt er ein Stück geradeaus und sinkt dann bogenförmig Richtung Boden, bis er dort auftrifft. Du hast hier also eine Form des waagrechten Wurfs. Wie du bestimmt weißt, besteht ein waagerechter Wurf aus zwei Teilbewegungen, einer gleichförmigen Bewegung und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, welche du aber zur Berechnung einzeln betrachten darfst. Da für die Berechnung der Flugdauer nur wichtig ist, wie lange der Pfeil vom Turm bis auf den Boden braucht, darf hier nur die y-Richtung betrachtet werden. Wir brauchen also für die Berechnung der Flugdauer die Formel für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Diese müssen wir allerdings im nächsten Schritt noch zur Flugdauer t umstellen.

Bei der Berechnung der Flugweite ist nur die x-Richtung wichtig, da es ausschließlich darum geht, wie weit der Pfeil vom Turm weggeflogen ist. In x-Richtung liegt eine gleichförmige Bewegung vor, also:

$$s_x = v \cdot t$$

Schritt 3: Stell die Formel nach dem Gesuchten um

Wie in Schritt 2 bereits angesprochen, muss du die Formel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung noch zu umstellen.

$$\begin{aligned}s_y &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 & | \cdot 2 \\ 2 \cdot s_y &= g \cdot t^2 & | :g \\ \frac{2 \cdot s_y}{g} &= t^2 & | \sqrt{\quad} \\ t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}}\end{aligned}$$

Die Formel für die Berechnung der Flugweite brauchst du nicht mehr umstellen, allerdings benötigst du zur Berechnung der Flugweite die Flugdauer, sodass du auf jeden Fall erst einmal die Flugdauer berechnen musst.

$$s_x = v \cdot t$$

Schritt 4: Rechne die gegebenen Werte in die richtige Einheit um

Bevor du deine Werte in die umgestellte Formel einsetzen kannst, musst du prüfen, ob alle Einheiten zusammenpassen. Die Höhe des Turms s_y ist in Metern angegeben, die Geschwindigkeit allerdings in Kilometer pro Stunde. Du rechnest also besser deine Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde um, also:

$$v = 180 \frac{\text{km}}{\text{m}} = 180 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 180 : 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Einheit des Ortsfaktors

$$[g] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

passt damit auch zusammen.

Schritt 5: Setze die Werte in die Formel ein

Jetzt kannst du alle Werte in die umgestellte Formel zur Berechnung der Flugdauer einsetzen und ausrechnen.

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 85 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 85 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \\ &= 4,16 \text{ s}\end{aligned}$$

Bei den Einheiten kannst du die Meter wegekürzen. Die Wurzel sorgt außerdem dafür, dass die Sekunden zum Quadrat zu Sekunden werden.

Mithilfe der Flugdauer kannst du nun auch die Flugweite berechnen.

$$\begin{aligned}
s_x &= v \cdot t \\
&= 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4,16 \text{ s} \\
&= 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4,16 \text{ s} \\
&= 208,14 \text{ m}
\end{aligned}$$

Hier lassen sich diesmal die Sekunden wegekürzen, sodass nur noch Meter übrig bleiben.

Der abgeschossene Pfeil landet also nach 4,16 s in 208,14 m Entfernung auf dem Boden.

Teilaufgabe b

Laut einer Sage ein großer Elbenkönig von einem 80 m hohen Turm dem Anführer des Orkheeres, welcher 444 m entfernt gestanden haben soll, einen Warnschuss direkt vor die Füße geschossen. Berechne, mit welcher Geschwindigkeit er seinen Pfeil abgeschossen haben muss.

Schritt 1: Finde, was gegeben und gesucht ist

In dieser Aufgabe hast du die Flugweite und auch die Höhe des Turms, von welchem der Pfeil abgeschossen wird, gegeben. Hier wird die Geschwindigkeit gesucht, mit welcher der Pfeil abgeschossen werden muss, um die angegebene Flugweite zu erreichen. Es folgt somit:

Gegeben:

Höhe des Turms: $s_y = 80 \text{ m}$

Flugweite: $s_x = 444 \text{ m}$

Gesucht:

Abschussgeschwindigkeit: v

Schritt 2: Finde die richtige Formel

Um die Abschussgeschwindigkeit zu berechnen, benötigst du wieder die Formel für die gleichförmige Bewegung:

$$s_x = v \cdot t$$

Diese musst du allerdings im nächsten Schritt noch zur Geschwindigkeit v umformen. Wie du vielleicht schon festgestellt hast, fehlt dir allerdings noch die Flugdauer, um die Abschussgeschwindigkeit zu berechnen. Deshalb musst du nicht nur die x-Richtung der Flugbahn betrachten, sondern auch die y-Richtung mit einbeziehen. Du benötigst also außerdem die Formel für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Bei dieser Formel hast du sowohl die Höhe des Turms s_y als auch den Ortsfaktor g gegeben. Du kannst also wie in Teilaufgabe a die Formel zur Flugdauer t des Pfeils umstellen und diese dann im Anschluss in die Formel für die gleichförmige Bewegung einsetzen.

Schritt 3: Stell die Formel nach dem Gesuchten um

Zunächst muss du die Formel der gleichförmigen Bewegung zur gesuchten Geschwindigkeit v umstellen:

$$\begin{aligned}
s_x &= v \cdot t \quad | : t \\
v &= \frac{s_x}{t}
\end{aligned}$$

Nun stellst du die Formel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung wieder zur Flugdauer um,

$$s_y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad | \cdot 2$$

$$2 \cdot s_y = g \cdot t^2 \quad | : g$$

$$\frac{2 \cdot s_y}{g} = t^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}}$$

um sie im Anschluss in die Formel für die Geschwindigkeit einzusetzen:

$$v = \frac{s_x}{t}$$

$$v = \frac{s_x}{\sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}}}$$

Schritt 4: Rechne die gegebenen Werte in die richtige Einheit um

Sowohl die Höhe des Turms s_y als auch die Flugweite s_x ist in der Einheit Meter angegeben. Diese stimmen, wie bereits in Teilaufgabe a angesprochen, auch mit der Einheit des Ortsfaktors g überein. Du kannst also direkt mit dem Einsetzen der Werte in die Formel beginnen.

Schritt 5: Setze die Werte in die Formel ein

Wenn du alle Werte in die Formel einsetzt ergibt sich:

$$v = \frac{s_x}{\sqrt{\frac{2 \cdot s_y}{g}}}$$

$$= \frac{444 \text{ m}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}}$$

$$= \frac{444 \text{ m}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}}$$

$$= 109,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Schuss muss also eine Anfangsgeschwindigkeit von $109,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gehabt haben, um 444 m weit geflogen zu sein.

Teilaufgabe c

Finde weitere Situationen aus deinem Alltag, die du mit einem waagerechten Wurf beschreiben kannst.

Schritt 1: Voraussetzungen sammeln

Ein waagerechter Wurf besteht aus einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung und einer gleichförmigen Bewegung in x-Richtung. Ein Körper bewegt sich von einem Ausgangspunkt in einer bestimmten Höhe bogenförmig Richtung Boden.

Schritt 2: Situationen finden

Jegliche Würfe, die in einer bestimmten Höhe beginnen und in x-Richtung abgeworfen werden, wie zum Beispiel Ball- oder Speerwürfe, können mithilfe des waagerechten Wurfs beschrieben werden. Aber auch Wasser, das aus einem Schlauch bogenförmig mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit austritt, kann mit dem waagerechten Wurf beschrieben und der Auftreffpunkt mithilfe der Formeln berechnet werden.

Lösung

1. Der abgeschossene Pfeil des Jägers landet nach 4,16 s in 208,14 m Entfernung auf dem Boden.
2. Der Schuss muss eine Anfangsgeschwindigkeit von $109,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gehabt haben, um 444 m weit geflogen zu sein.
3. Jegliche Würfe, die aus einer bestimmten Höhe in x-Richtung abgeworfen werden, können durch die Formeln des waagerechten Wurfs beschrieben werden (z. B. Ballwurf, Speerwurf). Aber auch zum Beispiel Wasser, das aus einem Schlauch bogenförmig austritt, kann durch den waagerechten Wurf beschrieben werden.