

Wie du zu Winkeln die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte bestimmst

Aufgabe

- a) Bestimme den Sinuswert von 60° .
- b) Bestimme den Kosinuswert von 60° .
- c) Bestimme den Tangenswert von 60° .

Das musst du wissen

Zwar haben Sinus, Kosinus und Tangens geometrische Bedeutungen, die man für Sinus und Kosinus auch schön am Einheitskreis interpretieren kann, allerdings ist es nahezu unmöglich, die Werte exakt abzumessen. Daher kann man Sinus- oder Kosinuswerte zu einem gegebenen Winkelwert nur näherungsweise am Einheitskreis ablesen und sollte sie für ein exaktes Ergebnis mit dem Taschenrechner bestimmen.

Lösungsschritte für Teilaufgabe a

- a) Bestimme den Sinuswert von 60° .

Schritt 1: Lies den Wert am Einheitskreis ab

Um den Sinuswert zu einem gegebenen Winkel am Einheitskreis abzulesen, benutzt du folgende Definition der Sinusfunktion:

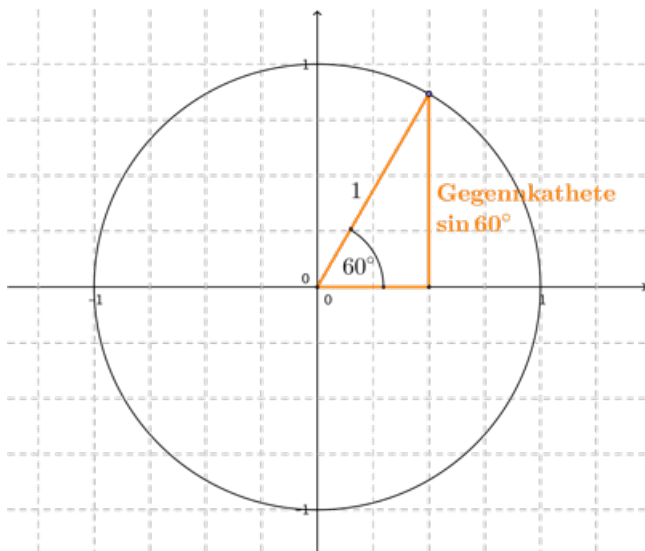
In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinuswert zu einem Winkel α definiert als Quotient der Längen der Gegenkathete und Hypotenuse.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Zeichnest du den gegebenen Winkel von 60° ausgehend von der x-Achse **gegen** den Uhrzeigersinn ein, so erhältst du mit dem Schnittpunkt des freien Schenkels des Winkels und dem Einheitskreis ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gerade der Radius des Einheitskreises ist. Die Hypotenuse hat also die Länge 1. Achtung: Je nachdem welchen Maßstab du zum Zeichnen genutzt hast, wird es sich dabei nicht tatsächlich um 1 cm handeln, das wäre dann doch sehr klein, sondern z. B. 4 cm.

Die Gegenkathete ist die senkrechte Verbindung des Schnittpunktes mit der x-Achse. **Ihre Länge (im entsprechenden Maßstab) ist der zu 60° gehörende Sinuswert.** Liest du die Länge bei einem Kreis mit einem tatsächlichen Radius von 4 cm mit dem Lineal ab, ermittelst du etwa 3,4 – 3,5 cm als Länge. Der Sinuswert ist dementsprechend der Quotient aus 3,4 bzw. 3,5 und 4:

$$\sin 60^\circ = \frac{3,4}{4} \quad (\text{also } 0,85 \text{ bzw. } 0,875)$$



Beachte, dass der Sinuswert negativ wird, wenn das Dreieck unterhalb der x-Achse liegt.

Schritt 2: Prüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner

Wenn du dein Ergebnis mit dem Taschenrechner prüfst, wirst du sehen, dass der tatsächliche Wert zwischen 0,85 und 0,875 liegt und 0,866025404... beträgt. Das exakt abzulesen ist wirklich unmöglich. Der Sinuswert von 60° kann

nämlich auch mit dem Taschenrechner nur näherungsweise angegeben werden, exakt beträgt er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Lösungsschritte für Teilaufgabe b

b) Bestimme den Kosinuswert von 60° .

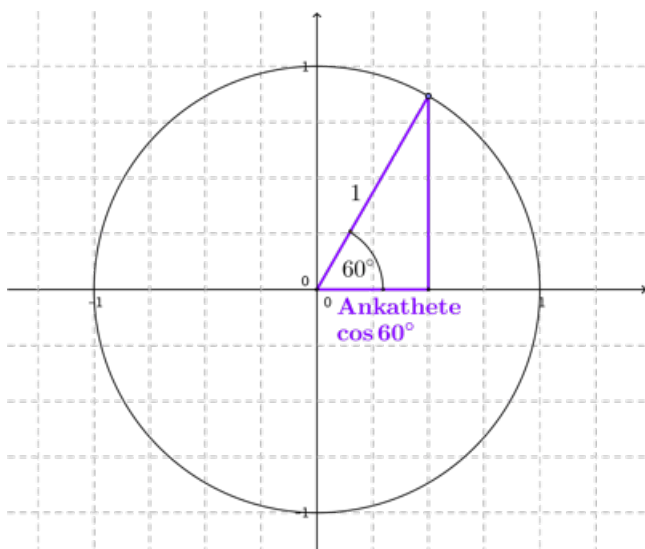
Schritt 1: Lies den Wert am Einheitskreis ab

Du kannst die Zeichnung aus Aufgabenteil a direkt weiterverwenden. Der Kosinus von 60° ist nun der Quotient aus der Länge der Ankathete und der Hypotenuse:

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

also der Länge des zum Dreieck gehörenden Abschnittes auf der x-Achse und dem Radius des Kreises. Liest du bei einem Kreis mit Radius 4 cm die Länge der Ankathete ab, so beträgt sie etwa 2 cm. Entsprechend muss der Kosinuswert von 60° näherungsweise dem Quotienten aus 2 und 4, also 0,5 entsprechen:

$$\cos 60^\circ = \frac{2}{4}$$



Beachte, dass der Kosinuswert negativ wird, wenn das Dreieck links von der y-Achse liegt.

Schritt 2: Prüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner

Prüfst du dein Ergebnis mit dem Taschenrechner, wirst du sehen, wie gut du gezeichnet hast. Der Kosinuswert von 60° beträgt in der Tat exakt 0,5.

Lösungsschritte für Teilaufgabe c

c) Bestimme den Tangenswert von 60° .

Schritt 1: Bilde den Quotienten aus Gegen- und Ankathete

Der Tangenswert eines Winkels ist definiert als Quotient aus Gegenkathete und Ankathete. Er entspricht also auch dem Quotienten aus Sinus- und Kosinuswert, da sich die Hypotenuse beim Teilen rauskürzt.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Benutzt du deine abgelesenen Werte 3,4 bzw. 3,5 und 2, so erhältst du als Tangenswert von 60° 1,7 bzw. 1,75. Dazwischen muss der exakte Wert liegen.

Schritt 2: Prüfe dein Ergebnis mit dem Taschenrechner

Der Taschenrechner liefert dir als Tangenswert von 60° den Wert 1,732050808..., wieder offensichtlich nur ein

Näherungswert. Mit dem angegebenen exakten Wert für den Sinus ($\frac{1}{2}\sqrt{3}$) kannst du aber berechnen, dass das genaue Ergebnis für den Tangens von 60° genau $\sqrt{3}$ sein muss.

Lösung

a) Der Sinuswert von 60° beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b) Der Kosinuswert von 60° beträgt 0,5.

c) Der Tangenswert von 60° beträgt $\sqrt{3}$.