

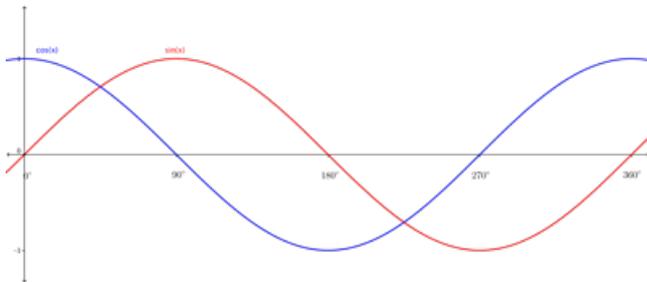
## Wie du zu Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten die Winkel bestimmst

### Aufgabe

- a) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Sinuswert 0,5?
- b) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Kosinuswert 0,5?
- c) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Tangenswert 0,5?

### Das musst du wissen

Zwar haben Sinus, Kosinus und Tangens geometrische Bedeutungen, die man für Sinus und Kosinus auch schön am Einheitskreis interpretieren kann, allerdings ist es nahezu unmöglich, die Werte exakt abzumessen und Strecken mit der entsprechenden Länge zu zeichnen. Daher kann man, abgesehen von evtl. auswendig gelernten Werten, Winkelmaße zu einem gegebenen Sinus-, Kosinus- oder Tangenswert nur mit dem Taschenrechner bestimmen. Im Bereich von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  gibt es immer zwei Winkelmaße, die zu einem gegebenen Wert gehören. Das kannst du dir für Sinus und Kosinus in der Grafik (s. u.) noch einmal ansehen. Der Taschenrechner liefert dir allerdings immer nur ein einziges Ergebnis. Das zweite kannst du dann aufgrund der Periodizität der beiden Funktionen mithilfe von Additionstheoremen herleiten.



### Lösungsschritte für Teilaufgabe a

- a) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Sinuswert 0,5?

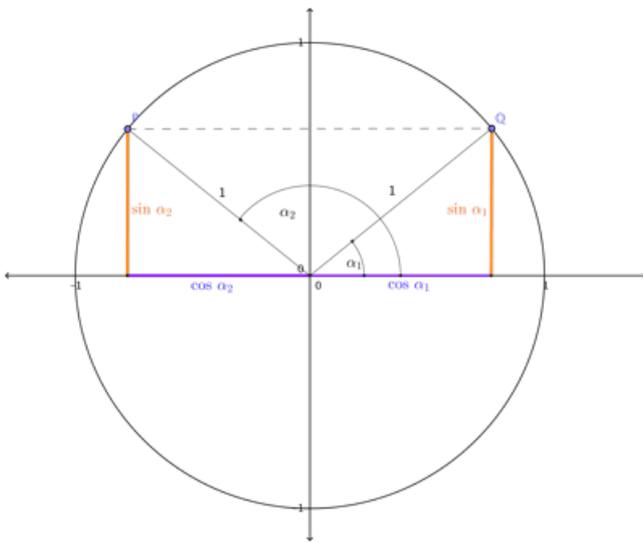
#### Schritt 1: Ermittle den ersten Winkelwert mit dem Taschenrechner

Achte darauf, dass dein Taschenrechner auf DEG eingestellt ist. Dann gibst du den gegebenen Sinuswert ein, also 0,5. Nun drückst du die SHIFT- bzw. 2nd-Taste und direkt anschließend die Funktionstaste, auf der SIN bzw. sin steht. Durch das vorherige Drücken der Taste für die Zweitfunktion bewirkst du, dass statt der Sinusfunktion (sin) die Umkehrfunktion des Sinus ( $\sin^{-1}$ ) auf den eingegebenen Wert angewendet wird, dass du also einen Winkel erhältst, der diesen Sinuswert liefert. Das Ergebnis ist 30. Der Sinuswert 0,5 wird also für ein Winkelmaß von  $30^\circ$  angenommen.

Solltest du einen negativen Wert angezeigt bekommen, z. B.  $-60$ , musst du 360 hinzuaddieren und erhältst dann aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion den passenden (positiven) Winkel, der zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  liegt.

#### Schritt 2: Ermittle den zweiten Winkelwert über ein Additionstheorem

Wenn du dir die Bedeutung der Sinus- und Kosinuswerte am Einheitskreis verdeutlichst, ist der Sinuswert immer die Länge der Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks, deren Hypotenuse der Radius mit Länge 1 ist.



In der Grafik erkennst du, dass zu einem gegebenen Sinuswert, der einmal links und einmal rechts von der y-Achse angenommen wird, zwei Winkelwerte gehören, hier bezeichnet mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Der Taschenrechner liefert dir einen Wert zwischen  $-90^\circ$  und  $90^\circ$ . Wenn du bei negativen Ergebnissen  $360^\circ$  addierst, wie in Schritt 1 beschrieben, erhältst du also einen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  oder zwischen  $270^\circ$  und  $360^\circ$ . Um den zweiten Winkel zu finden, der den gleichen Sinuswert annimmt, kannst du das folgende Additionstheorem benutzen:

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$$

Das liefert dir dann:

$$\sin(30^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(150^\circ)$$

Das zweite Winkelmaß, das den Sinuswert 0,5 annimmt, ist daher  $150^\circ$ .

Auch bei diesem Schritt könntest du ein negatives Ergebnis erhalten (wenn dein erster Winkel zwischen  $270^\circ$  und  $360^\circ$  liegt). Dann gilt wiederum, dass du aufgrund der Periodizität durch die Addition von  $360^\circ$  das zweite positive Ergebnis erhältst.

### Lösungsschritte für Teilaufgabe b

b) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Kosinuswert 0,5?

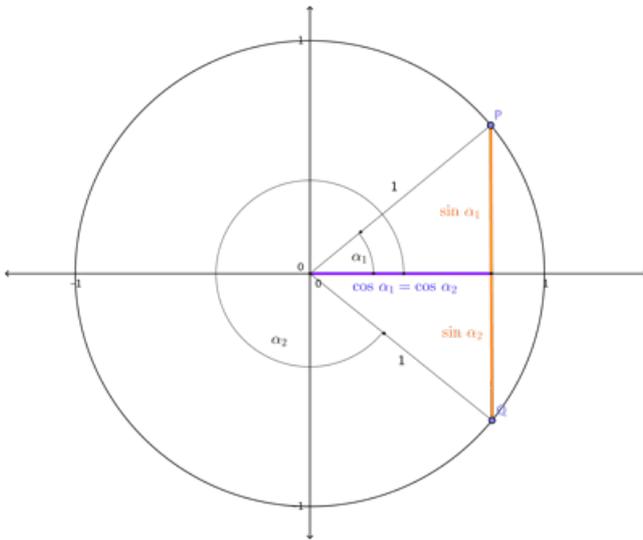
#### Schritt 1: Ermittle den ersten Winkelwert mit dem Taschenrechner

Wie in Aufgabenteil a musst du auf die Einstellung DEG achten. 0,5 eingeben, SHIFT bzw. 2nd und die COS/cos-Taste drücken liefert dir dann das Ergebnis 60. Bei  $60^\circ$  wird also der Kosinuswert 0,5 angenommen.

Auch hier kannst du bei einem negativen Ergebnis 360 addieren, um ein positives Winkelmaß zu erhalten, das zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  liegt.

#### Schritt 2: Ermittle den zweiten Winkelwert über ein Additionstheorem

Am Einheitskreis interpretiert ist der Kosinuswert eines Winkels die Länge der dazugehörigen Ankathete im rechtwinkligen Dreieck mit dem Radius des Einheitskreises als Hypotenuse. Das Dreieck kann einmal ober- und einmal unterhalb der x-Achse liegen, deswegen gehört eine Ankathete bzw. ein Kosinuswert zu zwei Winkeln, in der Grafik mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bezeichnet.



Über das folgende Additionstheorem erhältst du das zweite Winkelmaß zu dem gegebenen Kosinuswert:

$$\cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)$$

Es gilt also bei der vorliegenden Aufgabe:

$$\cos(60^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(300^\circ)$$

Daher ist  $300^\circ$  das zweite Winkelmaß, das den Kosinuswert 0,5 annimmt.

### Lösungsschritte für Teilaufgabe c

c) Zu welchen Winkelmaßen ( $\in [0^\circ, 360^\circ]$ ) gehört der Tangenswert 0,5?

#### Schritt 1: Ermittle den ersten Winkelwert mit dem Taschenrechner

Auch für den Tangens kannst du mit dem Taschenrechner unter Verwendung der Zweitbelegung der TAN/tan-Taste das zugehörige Winkelmaß berechnen lassen. Der Taschenrechner liefert dir einen Wert von ungefähr  $26,565^\circ$ .

Falls ein negativer Winkelwert ermittelt wird, addierst du 180 (denn der Tangens hat eine kürzere Periode als Sinus und Kosinus).

#### Schritt 2: Ermittle den zweiten Winkelwert über ein Additionstheorem

Den Tangens kann man leider nicht anschaulich am Einheitskreis darstellen. Er ergibt sich als Quotient aus Sinus und Kosinus (bzw. Quotient aus der Gegen- und Ankathete), und da diese alle Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annehmen, kann der Tangens jede beliebige reelle Zahl als Wert annehmen. Er ist aber, ebenso wie Sinus und Kosinus, periodisch, daher kannst du das folgende Additionstheorem benutzen, um einen zweiten Winkelwert zu ermitteln:

$$\tan(\alpha) = \tan(180^\circ + \alpha)$$

Es folgt:

$$\tan(26,565^\circ) = \tan(180^\circ + 26,565^\circ) = \tan(206,565^\circ)$$

Das zweite zugehörige Winkelmaß, das den Tangenswert 0,5 annimmt, ist daher  $206,565^\circ$ .

### Lösung

a) Der Sinuswert 0,5 wird von den Winkelmaßen  $30^\circ$  und  $150^\circ$  angenommen.

b) Der Kosinuswert 0,5 wird von den Winkelmaßen  $60^\circ$  und  $300^\circ$  angenommen.

c) Der Tangenswert 0,5 wird von den Winkelmaßen  $26,565^\circ$  und  $206,565^\circ$  angenommen.