Wie du lokale Extrema bestimmst

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f:

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{3 - x^2}$$

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion f und gib an, um was für eine Art Extremum es sich jeweils handelt.

Das musst du wissen

Extremstellen einer Funktion sind Stellen, an denen die Funktion lokal (auf eine Umgebung begrenzt) oder absolut (auf den kompletten Definitionsbereich bezogen) die größten oder kleinsten Werte annimmt. Diese Werte können an den Grenzen des Definitionsbereiches angenommen werden oder es handelt sich um Hoch- und Tiefpunkte der Funktion. Im Folgenden wirst du sehen, wie du die lokalen Extrema der Funktion f, also ihre Hoch- und Tiefpunkte, mithilfe der 1. und 2. Ableitung rechnerisch ermittelst. Alternativ könntest du statt der 2. Ableitung auch das Vorzeichenwechselkriterium verwenden.

Schritt 1: Bestimme die 1. Ableitung

Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion sind dadurch charakterisiert, dass eine Tangente an den Graphen der Funktion durch diesen Punkt die Steigung 0 besitzt. Das bedeutet, dass auch der Graph von f in diesem Punkt die Steigung 0 besitzt. Die Steigung des Graphen einer Funktion, sein Monotonieverhalten, bestimmst du mithilfe der 1. Ableitung der Funktion. Du musst also nun f' berechnen.

Dazu untersuchst du zuerst die Struktur von f. f ist das Produkt zweier Funktionen, wobei die zweite Funktion eine Verkettung von ebenfalls zwei Funktionen ist. Du kannst definieren:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$, wobei $g(x) = 1 - x^2$ und $h(x) = e^{3 - x^2}$ und:

$h(x) = u(v(x))$ mit $u(x) = e^x$ und $v(x) = 3 - x^2$

Die Ableitung von f ergibt sich über die Produktregel als:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Dabei ist $g'(x) = -2x$.

Um $h'(x)$ zu bestimmen, musst du die Kettenregel anwenden. Diese liefert dir:

$$h'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Da der Term e^x, die (natürliche) Exponentialfunktion, abgeleitet gerade wieder e^x ist, gilt $u'(x) = u(x)$, also:

$$u'(v(x)) = u(v(x)) = h(x) = e^{3 - x^2}$$

Weiter ist die „innere Ableitung“, also die Ableitung der „inneren“ Funktion:

$$v'(x) = -2x$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von h:

$$h'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = e^{3 - x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{3 - x^2}$$

Nun hast du alle „Bausteine“ zur Bestimmung der Ableitung von f zusammen.

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = (-2x) \cdot e^{3 - x^2} + (1 - x^2) \cdot (-2x \cdot e^{3 - x^2})$$

Zusammenfassen ergibt:

$f'(x) = (-2x - 2x + 2x^3) \cdot e^{3-x^2} = (-4x + 2x^3) \cdot e^{3-x^2}$

Schritt 2: Bestimme die Nullstellen der 1. Ableitung

Du suchst nun die Werte, bei denen die 1. Ableitung von f den Wert 0 annimmt, für die also $f'(x) = 0$ gilt. Diese Bedingung heißt *notwendiges Kriterium.* Kandidaten für Extrema müssen diese Bedingung auf jeden Fall erfüllen. Bestimme also nun die Nullstellen von $f'(x)$.

$f'(x)$ ist wieder ein Produkt aus zwei Termen, nämlich aus $-4x + 2x^3$ und e^{3-x^2}.

Da ein Produkt 0 wird, wenn einer seiner Faktoren 0 ist (oder beide), musst du die Terme getrennt untersuchen.

$-4x + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (-2 + x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ oder $-2 + x^2 = 0$

Das ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x^2 = 2$, also $x = 0$ oder $x = +/-\sqrt{2}$.

Damit liefert dir der erste Term drei Nullstellen der 1. Ableitung und damit drei Kandidaten für lokale Extrema.

Was ist mit dem zweiten Term, e^{3-x^2}? Wann nimmt dieser den Wert 0 an? Die Antwort ist: gar nicht. Da $e = 2{,}718281...$ die Eulersche Zahl ist, ist ein Ausdruck der Form e^y immer positiv, egal ob y positiv oder negativ ist oder den Wert 0 annimmt.

Damit kann der zweite Faktor von $f'(x)$ nicht 0 werden und es bleibt bei den drei Nullstellen der 1. Ableitung: $-\sqrt{2}$, 0 und $\sqrt{2}$.

Schritt 3: Bestimme die 2. Ableitung

Um festzustellen, ob es sich bei deinen Kandidaten für Extrema tatsächlich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt, kannst du zum Beispiel die Krümmung des Graphen untersuchen. Liegt in einem der Kandidaten für Extremstellen, die du mit der 1. Ableitung berechnet hast, eine Rechtskrümmung vor, dann handelt es sich um einen Hochpunkt. Erhältst du hingegen eine Linkskrümmung, so handelt es sich um einen Tiefpunkt. Ist keine Krümmung vorhanden (bzw. der Wert der Krümmung 0), dann handelt es sich weder um einen Tief- noch um einen Hochpunkt. Dann liegt dort ein Sattelpunkt oder Wendepunkt vor. Die Krümmung des Graphen einer Funktion bestimmst du mithilfe der 2. Ableitung der Funktion. Du musst also nun f'' berechnen.

Da f' die gleiche Struktur aufweist wie f, kannst du zum Bilden der 2. Ableitung auch die gleiche Vorgehensweise benutzen.

$f'(x) = \tilde{g}(x) \cdot \tilde{h}(x)$, wobei $\tilde{g}(x) = -4x + 2x^3$ und $\tilde{h}(x) = e^{3-x^2}$

f'' ergibt sich wieder über die Produktregel als:

$f''(x) = \tilde{g}'(x) \cdot \tilde{h}(x) + \tilde{g}(x) \cdot \tilde{h}'(x)$

Dabei ist:

$\tilde{g}'(x) = -4 + 6x^2$

Da $\tilde{h}(x) = h(x)$ ist, gilt:

$\tilde{h}'(x) = h'(x) = -2x \cdot e^{3-x^2}$

Einsetzen der berechneten Ableitungsterme liefert:

$f''(x) = \tilde{g}'(x) \cdot \tilde{h}(x) + \tilde{g}(x) \cdot \tilde{h}'(x) = (-4 + 6x^2) \cdot e^{3-x^2} + (-4x + 2x^3) \cdot (-2x \cdot e^{3-x^2})$

Zusammenfassen ergibt:

$f''(x) = (-4 + 6x^2 + 8x^2 - 4x^4) \cdot e^{3-x^2} = (-4 + 14x^2 - 4x^4) \cdot e^{3-x^2}$

Schritt 4: Setze die Nullstellen der 1. Ableitung in die 2. Ableitung ein

Nun kannst du deine Kandidaten für Extrema, also die Nullstellen der 1. Ableitung, in die 2. Ableitung einsetzen und überprüfen, ob dabei ein Wert >0 oder <0 herauskommt. Ist das der Fall, dann erfüllt die entsprechende Stelle das *hinreichende Kriterium* für ein Extremum: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$. Dabei ist der exakte Wert der 2. Ableitung nicht von Interesse, nur das Vorzeichen ist relevant. Wie du schon weißt, ist im Beispiel der zweite Faktor, e^{3-x^2}, immer positiv, deshalb musst du dir nur Gedanken über das Vorzeichen des ersten Faktors machen, $-4+14x^2-4x^4$. Es gilt:

$f''(0)=(-4)\cdot e^{3-x^2}<0$

$f''(-\sqrt{2})=(-4+14\cdot 2-4\cdot 4)\cdot e^{3-x^2}=4\cdot e^{3-x^2}>0$

$f''(\sqrt{2})=f''(-\sqrt{2})=4\cdot e^{3-x^2}>0$

Es gilt: Nimmt die 2. Ableitung einen Wert <0 an, so liegt eine Rechtskrümmung vor; nimmt sie einen Wert >0 an, so liegt eine Linkskrümmung vor.

An der Stelle 0 liegt daher ein Maximum, die Stellen $+/-\sqrt{2}$ liefern Minima. Setzt du die Werte jeweils in den ursprünglichen Funktionsterm, $f(x)$, ein, erhältst du:

$(0\,|\,e^3)\approx(0\,|\,20{,}01)$ ist ein Hochpunkt und

$(-\sqrt{2}\,|-e)\approx(-1{,}41\,|-2{,}72)$ und $(\sqrt{2}\,|-e)\approx(1{,}41\,|-2{,}72)$ sind Tiefpunkte.

Lösung

Die Funktion $f(x)$ besitzt drei lokale Extrema. Es sind der Hochpunkt $H(0\,|\,e^3)$ und die beiden Tiefpunkte $T_1(-\sqrt{2}\,|-e)$ und $T_2(\sqrt{2}\,|-e)$.

Zum Vergleich findest du hier ein Bild des Graphen von $f(x)$: