Wie du die Lage von Geraden im Raum bestimmst

Aufgabe

Untersuche die Lage der folgenden Geraden zueinander:

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungsschritte für Teilaufgabe a)

Überprüfe die Lage der folgenden Geraden zueinander:

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schritt 1: Überprüfe die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit

Wenn du die Lage zweier Geraden im Raum zueinander überprüfen sollst, gibt es vier verschiedene Möglichkeiten: Sie sind identisch, echt parallel, windschief oder sie schneiden sich. Um diese Möglichkeiten systematisch zu untersuchen, überprüfst du zuerst immer, ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear abhängig sind. Zwei Vektoren sind dann linear abhängig, wenn **der eine Vektor ein Vielfaches des anderen** darstellt. Dazu stellst du die folgende Gleichung auf:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wenn du t für die erste Zeile berechnest, erhältst du:

$3 = t \cdot (-6) \mid :(-6)$

$t = -0{,}5$

Wenn du den gleichen Rechenschritt auch für die anderen beiden Zeilen durchführst, stellst du fest, dass sich dort die **gleiche Zahl für t** ergibt. Das bedeutet, dass die beiden Richtungsvektoren **linear abhängig** sind. Also sind die Geraden **entweder identisch oder parallel**.

Schritt 2: Überprüfe, ob die Geraden identisch oder parallel sind

Als Nächstes musst du überprüfen, ob die beiden Geraden identisch oder echt parallel sind. Dazu setzt du den **Aufpunkt der einen Geraden in die Gleichung der anderen Geraden** ein. Setze hier zum Beispiel den Aufpunkt (4|3|1) der Geraden h für $\vec{X}$ in die Gleichung der Geraden g ein.

$$g\colon \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnest du für eine Zeile dieser Gleichung das t. Für die erste Zeile gilt zum Beispiel:

$4 = 1 + t \cdot 3$

Wenn du diese Gleichung nach t auflöst, erhältst du:

$4 = 1 + t \cdot 3 \mid -1$

$3 = t \cdot 3 \mid :3$

$t = 1$

Setze dieses Ergebnis für t in die anderen beiden Zeilen ein. Schon gleich in der zweiten Zeile ergibt sich ein Widerspruch.

$3 = 3 + 1 \cdot 2$

Diese Gleichung **stimmt nicht**. Also liegt der Aufpunkt von h **nicht** auf der Geraden g. Das bedeutet wiederum, dass die beiden Geraden **nicht identisch** sind. Somit sind g und h **echt parallel**.

Lösungsschritte für Teilaufgabe b)

b) $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Überprüfe auf lineare Abhängigkeit

Wieder überprüfst du als Erstes, ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear abhängig sind. Dazu stellst du die folgende Gleichung auf:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wenn du nun t für die erste Zeile berechnest, erhältst du:

$3 = t \cdot 1$

$t = 3$

Setzt du diese Zahl für t in die zweite Zeile ein, ergibt sich:

$2 = 3 \cdot 1$

Das ist ein **Widerspruch**. Die Richtungsvektoren sind also **nicht linear abhängig**. Das bedeutet, dass die beiden Geraden **entweder windschief sind oder sich schneiden**.

Schritt 2: Überprüfe, ob die beiden Geraden windschief sind oder sich schneiden

Als Nächstes überprüfst du also, ob die beiden Geraden sich schneiden. Dazu setzt du die beiden Geradengleichungen gleich. Achte dabei darauf, dass du für den Parameter zwei verschiedene Buchstaben verwendest, zum Beispiel – wie hier schon vorgegeben – einmal t und einmal s.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt schreibst du jede Zeile einzeln auf, sodass sich ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten ergibt.

$I.\ -2 + t \cdot 3 = -6 + s \cdot 1$

$II.\ 7 + t \cdot 2 = 4 + s \cdot 1$

$III.\ 2 + t \cdot 1 = -1 + s \cdot 2$

Dieses Gleichungssystem löst du jetzt mit einer Methode deiner Wahl. Du benötigst dafür nur zwei der drei Gleichungen. Verwende zum Beispiel das Additionsverfahren und ziehe die II. von der I. Gleichung ab.

$I.\ -\ II.:\ -9 + t \cdot 1 = -10 \mid +9$

$t = -1$

Setze diese Zahl für t in die II. Gleichung ein und berechne s.

$II.\ 7 + (-1) \cdot 2 = 4 + s \cdot 1 \mid -4$

$s = 1$

Als Letztes setzt du beide Zahlen in die III. Gleichung ein und überprüfst, ob diese Gleichung so stimmt.

$III.\ 2 + (-1) \cdot 1 = -1 + 1 \cdot 2$

$1 = 1$

Die Gleichung **stimmt** so. Das bedeutet, dass sich die beiden Geraden **schneiden**. Die Koordinaten des Schnittpunkts S erhältst du, indem du **entweder** die Zahl für t in die Gleichung von g **oder** die Zahl für s in die Gleichung von h einsetzt. Mit g ergibt sich zum Beispiel:

$$g: \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn du die Koordinaten zeilenweise berechnest, ergibt sich für S:

S(−5|5|1)

Lösung

Teilaufgabe a): Die beiden Geraden sind echt parallel.

Teilaufgabe b): Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt S(−5|5|1).