Wie du die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion bestimmst

Aufgabe

Ermittle durch Rechnung die Koordinaten des Scheitels der Parabel

$y = -0{,}5x^2 + 2x - 0{,}75.$

Schritt 1: Quadratische Ergänzung

Die Parabelgleichung liegt in der allgemeinen Form

$ax^2 + bx + c$

vor, wobei hier $a = -0{,}5$, $b = 2$ und $c = -0{,}75$ ist. Um von der allgemeinen Form zurScheitelpunktform zu gelangen, musst du als Erstes den Faktor a vor dem x^2 ausklammern. Das liefert die sogenannte Normalform

$-0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 1{,}5).$

Jetzt machst du einen sogenannten quadratischen Einschub:

Du nimmst die Hälfte des grünen Faktors vor dem x (also 2) und quadrierst. Das liefert 2^2. Diesen Term fügst du einmal mit Plus und einmal mit Minus in die Klammer ein (direkt hinter dem x):

Aus $-0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 1{,}5)$ wird dann

$-0{,}5 \cdot \left(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1{,}5\right).$

Jetzt wendest du die zweite binomische Formel[1] an. Die sagt dir, dass

$x^2 - 4x + 2^2 = (x-2)^2$

ist. Das bedeutet, dass wir den Term $x^2 - 4x$ gerade um 2^2 *ergänzt* haben, um das *Quadrat* $(x-2)^2$ zu erhalten. Deswegen nennt man diesen Vorgang quadratische Ergänzung.

Auf jeden Fall setzt du die braune Formel jetzt in die vorherige ein und bekommst

$-0{,}5 \cdot \left(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1{,}5\right) = -0{,}5 \cdot \left((x-2)^2 - 2^2 + 1{,}5\right).$

Nun berechnest du noch $-2^2 + 1{,}5 = -4 + 1{,}5 = -2{,}5$ und ziehst diesen Term aus der Klammer raus:

$$\begin{aligned} & -0{,}5 \cdot \left((x-2)^2 - 2^2 + 1{,}5\right) \\ = & -0{,}5 \cdot \left((x-2)^2 - 2{,}5\right) \\ = & -0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 1{,}25. \end{aligned}$$

Das ist die Scheitelpunktform $a(x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = -0{,}5$, $x_S = 2$ und $y_S = 1{,}25$.

[1] Wenn der x-Term in der Normalform $+4x$ statt $-4x$ wäre, müsstest du an dieser Stelle die erste binomische Formel anwenden.

Schritt 2: Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen

In der Scheitelpunktform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ kannst du den Scheitelpunkt sofort ablesen, er hat die Koordinaten $S(x_S | y_S)$.

Lösung

Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind also in unserem Fall $S(2 | 1{,}25)$.