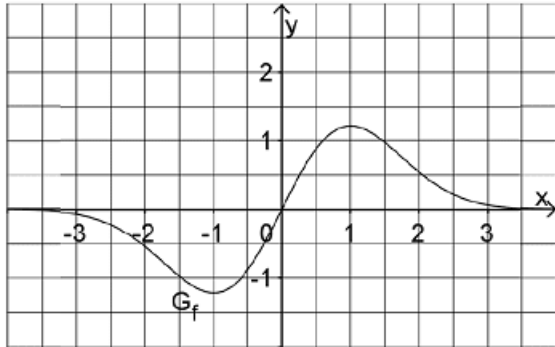


Wie du Integrale umformst

Aufgabe

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f .



Im Folgenden wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_c: x \mapsto f(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ betrachtet.

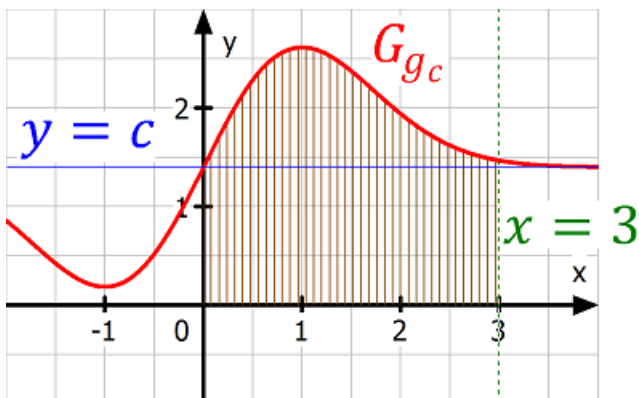
Begründe für $c > 0$ anhand einer geeigneten Skizze, dass

$$\int_0^3 g_c(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + 3c$$

gilt.

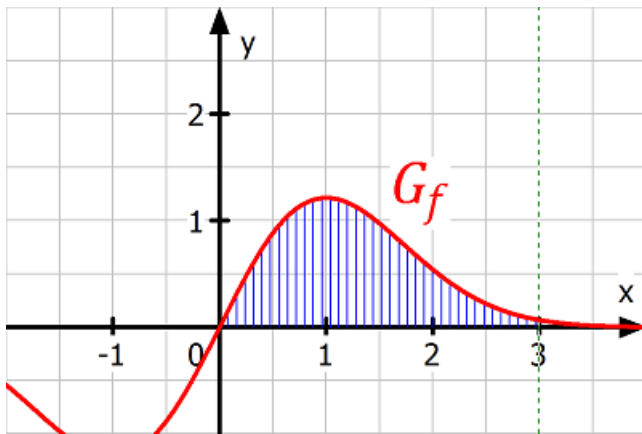
Schritt 1: Skizze anfertigen

Das Integral auf der linken Seite der Gleichung $\int_0^3 g_c(x) dx$, stellt die Fläche zwischen dem Graphen von g_c und der x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq 3$ dar, die in der folgenden Skizze braun schraffiert ist.



Schritt 2: Geeignete Umformungsregeln anwenden

Wegen $g_c(x) = f(x) + c$ entsteht G_{g_c} aus dem Graphen von f durch Verschiebung um c Längeneinheiten nach oben. Somit entspricht der Teil der braun schraffierten Fläche, der oberhalb der blauen Linie liegt, genau der blau schraffierten Fläche zwischen G_f und der x -Achse.



Der Teil der braunen Fläche, der unterhalb der blauen Linie liegt, ist ein Rechteck der Breite 3 und der Höhe c , hat also den Flächeninhalt $3c$. Somit ist die braune Fläche die Summe aus der blauen Fläche und der Rechtecksfläche.

Die zugehörige Umformungsregel „Summen auseinanderziehen“ (die 2. Umformungsregel) für Integralterme lautet

$$\int_0^3 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx,$$

was man sich bildlich wie folgt vorstellen kann:



In unserem Fall ist $g(x) = c$ konstant, also $\int_0^3 g(x) dx = [cx]_0^3 = 3c$. Setzt du dies in die grüne Formel ein und beachtest, dass der Integrand auf der linken Seite genau $g_c(x)$ ist, so ergibt sich die Gleichung, die zu begründen war.

Bemerkung

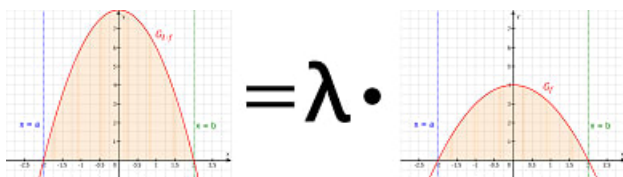
Es gibt noch zwei andere Umformungsregeln für Integralterme, die abgefragt werden können.

1. Umformungsregel: Konstanten rausziehen

Für jeden Integranden f und jede reelle Zahl λ gilt für beliebige Integrationsgrenzen a und b :

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Diesen Sachverhalt kannst du dir folgendermaßen veranschaulichen:



3. Umformungsregel: Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen

Du kannst das Intervall, über das du integrieren willst – hier $[a; c]$ – in zwei Teilintervalle, etwa $[a; b]$ und $[b; c]$, aufteilen und die Teilintegrale aufsummieren, d. h.:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Den Sachverhalt kannst du dir folgendermaßen veranschaulichen:

