Wie du Parameter einer allgemeinen Sinusfunktion bestimmst

Aufgabe

Gib jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

a. 1. Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \longmapsto \sin(x)$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

b. 2. Die Funktion h hat den Wertebereich $[1; 3]$.

c. 3. Die Funktion k besitzt die Periode π.

Schritt 1: Funktionsgleichung der allgemeinen Sinusfunktion aufstellen

Wenn nach einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion gefragt ist, dann läuft die Aufgabenstellung immer auf eine allgemeine Sinusfunktion hinaus. Das heißt, die Lösung hat die Form

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

und du musst passende Parameter a, b, c und d suchen.

Schritt 2: Streckungsfaktor anpassen für a)

Die einfachste allgemeine Sinusfunktion ist die mit den Parametern $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$. Das ist nämlich die gewöhnliche Sinusfunktion $x \longmapsto \sin(x)$. Für Streckung und Spiegelung an der x-Achse ist der Parameter a zuständig (der heißt auch in manchen Büchern Streckfaktor). Spiegelung an der x-Achse erreichst du, indem du die Vorzeichen von a und d umpolst. Aus den Parametern $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$ der gewöhnlichen Sinusfunktion werden somit die neuen Parameter $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$. Einsetzen in den Funktionsterm der allgemeinen Sinusfunktion liefert:

$$(-1) \cdot \sin(1 \cdot x + 0) + 0 = -\sin(x)$$

Laut Aufgabenstellung soll die gespiegelte Funktion g heißen, also musst du in deiner Lösung schreiben:
$g(x) = -\sin(x)$.

Schritt 3: Verschiebungsparameter anpassen für b)

Gehe wieder vom einfachsten Fall aus: der gewöhnlichen Sinusfunktion mit den Parametern $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$. Der zugehörige Wertebereich ist $[-1; 1]$, gefragt ist aber der Wertebereich $[1; 3]$. Du musst also den Wertebereich um 2 LE nach oben verschieben. Dafür ist der Verschiebungsparameter d zuständig. Eine Verschiebung um 2 Einheiten nach oben erreichst du, indem du den Parameter d um 2 größer machst. Statt $d = 0$ (wie bei der gewöhnlichen Sinusfunktion) nehmen wir also $d = 2$. Die übrigen Parameter können unverändert bleiben ($a = 1$, $b = 1$ und $c = 0$). Einsetzen in den Funktionsterm der allgemeinen Sinusfunktion liefert:

$$1 \cdot \sin(1 \cdot x + 0) + 2 = \sin(x) + 2$$

In der Aufgabenstellung ist die Bezeichnung h für die Lösungsfunktion vorgegeben. Schreibe also als Lösung:

$$h(x) = \sin(x) + 2$$

Schritt 4: Periodenstreckung anpassen für c)

Die gewöhnliche Sinusfunktion hat die Periode 2π. Für eine Streckung oder Stauchung der Periode ist der Parameter b zuständig. Dabei gilt für die Periode P der allgemeinen Sinusfunktion die Formel:

$$P = \frac{2\pi}{b}$$

Gewünscht wird $P = \pi$, also müssen wir b so wählen, dass $\frac{2\pi}{b} = \pi$ gewährleistet ist. Auflösen nach b liefert $b = 2$. Die übrigen Parameter kannst du so lassen, wie sie bei der gewöhnlichen Sinusfunktion sind ($a = 1$, $c = 0$ und $d = 0$). Einsetzen dieser Parameter in den Funktionsterm der allgemeinen Sinusfunktion liefert:

$1 \cdot \sin(2 \cdot x + 0) + 2 = \sin(2x)$

In der Aufgabenstellung wird verlangt, dass deine Lösung k heißt. Schreibe also als Lösung:

$k(x) = \sin(2x)$