

Wie du die "Dreimal mindestens"-Aufgabe löst

Aufgabe

Bei Kontrollen der Polizei werden Fahrräder, die Mängel aufweisen, beanstandet. Bei diesen Prüfungen hat durchschnittlich ein Sechstel der Fahrräder Mängel.

Bestimme die Anzahl n der Fahrräder, die von der Polizei kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Fahrrad mit Mängeln entdeckt wird.

Schritt 1: Ungleichung aufstellen

Die Anzahl der kontrollierten Fahrräder, die Mängel aufweisen, werde durch die Zufallsvariable X angegeben.

Die Aufgabenstellung verlangt, dass folgende Bedingung gewährleistet ist:

$$P(X \geq 1) \geq 90$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1)$ hängt ab von den Parametern n (Anzahl der kontrollierten Fahrräder) und p

(Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Einzelkontrolle ein Fahrrad beanstandet wird). Vorgegeben ist nur $p = \frac{1}{6}$ und du musst das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$ finden, sodass die grüne Ungleichung gewährleistet ist.

Schritt 2: Formel nach n auflösen und Antwort formulieren

Um zu sehen, wie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 1)$ von n abhängt, betrachtest du das Gegenereignis von $X \geq 1$, nämlich $X = 0$ (X kann ja nur ganzzahlige Werte ≥ 0 annehmen).

Tipp: Immer wenn ein Ereignis mit „mindestens ein ...“ formuliert ist, solltest du mit dem Gegenereignis arbeiten, das dann weniger aufwendig zu berechnen ist.

Merkregel: „Mindestens ein“ heißt 1 minus „kein“.

Nach diesen Überlegungen ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, wobei $P(X = 0)$ direkt mit der Bernoulli-Formel berechnet wird.

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0}$$

Hier ist $p = \frac{1}{6}$, also ist $1 - p = \frac{5}{6}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Setze nun die braune Gleichung in die grüne Ungleichung ein und ersetze dann $P(X = 0)$ durch den eben berechneten Term. Das Ergebnis ist die Ungleichung:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 90$$

Jetzt löst du die Ungleichung nach n auf.

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9$$

$$1 - 0,9 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\ln(0,1) \geq \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\ln(0,1) \geq n \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \leq n$$

Achtung: Im letzten Schritt wurde durch die negative Zahl $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ geteilt, weswegen sich das Ungleichheitszeichen umkehrt!

Der Taschenrechner liefert:

$$\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,63$$

Die kleinste natürliche Zahl, die die grüne Ungleichung erfüllt, ist also $n = 13$.

Jetzt kannst du deinen Antwortsatz formulieren, z. B. so:

Es müssen mindestens 13 Fahrräder kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eines mit Mängeln entdeckt wird.