

Wie du den Radius eines Kreises berechnest

Aufgabe

Ein zylinderförmiges Wasserglas ist 13 cm hoch. Der Inhalt der äußeren Oberfläche beträgt $87\pi \text{ cm}^2$.

Berechne den Radius der Grundfläche.

Schritt 1: Formel für den Oberflächeninhalt nutzen

Die äußere Oberfläche des Glases besteht aus der zylindrischen Mantelfläche und dem Boden. Die zugehörigen Flächen sind

$$A_{\text{Mantel}} = 2\pi \cdot r \cdot h \text{ und } A_{\text{Boden}} = \pi \cdot r^2,$$

wobei r der Radius der Grundfläche (Glasboden) und h die Höhe des Glases ist. Die gesamte äußere Oberfläche ist also

$$A = A_{\text{Mantel}} + A_{\text{Boden}} = 2\pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2.$$

Schritt 2: Werte einsetzen und nach r umstellen

Laut Aufgabenstellung ist die Höhe $h = 13 \text{ cm}$ und die äußere Oberfläche beträgt $87\pi \text{ cm}^2$, d. h. es gilt

$$A = 2\pi \cdot r \cdot 13 \text{ cm} + \pi \cdot r^2 = 87\pi \text{ cm}^2.$$

Diese Gleichung musst du nach r auflösen, um den Radius berechnen zu können.

Vereinfache die Gleichung zuerst, indem du durch π teilst und für einen Moment ohne Einheiten rechnest:

$$2 \cdot r \cdot 13 + r^2 = 87 \text{ bzw.}$$

$$r^2 + 26 \cdot r - 87 = 0.$$

Jetzt kannst du die quadratische Lösungsformel anwenden und erhältst

$$r = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-87)}}{2}.$$

Die rechte Seite vereinfachst du am besten wie folgt:

$$26^2 = (2 \cdot 13)^2 = 2^2 \cdot 13^2 = 4 \cdot 169.$$

Also kannst du die Quadratzahl 4 unter der Wurzel ausklammern und aus der Wurzel herausziehen:

$$\begin{aligned} \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-87)} &= \sqrt{4 \cdot 169 + 4 \cdot 87} \\ &= \sqrt{4 \cdot (169 + 87)} \\ &= 2\sqrt{169 + 87} \\ &= 2\sqrt{256} \\ &= 2 \cdot 16 = 32. \end{aligned}$$

Setze $\sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-87)} = 32$ in die grüne Formel ein und erhalte

$$r = \frac{-26 \pm 32}{2} = -13 \pm 16.$$

Der gesuchte Radius ist natürlich nicht negativ, also brauchst du die größere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung: $r = -13 + 16 = 3$.

Jetzt musst du die Einheiten wieder einführen, die du zur Vereinfachung der Rechnung weggelassen hast.

Lösung

Alle Größen waren in Zentimeter gegeben, also ist der gesuchte Radius des Glasbodens $r = 3 \text{ cm}$.